Решения задач

9 класс

9.1. **Ответ.** 3 ребят.

Покажем, что всегда можно выбрать 3 ребят так, чтобы у них нашлись карандаши всех цветов. Так как карандашей каждого цвета 6, а каждому досталось по 4 карандаша, то кому-то достались карандаши по крайней мере двух различных цветов. Осталось добавить к нему двух ребят, у которых есть карандаши оставшихся двух цветов.

Покажем теперь, как раздать карандаши ребятам, чтобы у любых двух из них вместе были карандаши не более трех цветов. Дадим одному ребенку 4 карандаша второго цвета, одному — 4 карандаша третьего цвета, одному — 4 карандаша четвертого цвета, одному — по 2 карандаша первого и второго цвета, одному — по 2 карандаша первого и третьего цвета, и еще одному — по 2 карандаша первого и четвертого цвета.

9.2. Предположим противное. Обозначим наши числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100}; будем считать, что $a_{100+n} = a_n$. Тогда выполнены неравенства $a_n + a_{n+3} \leqslant a_{n+1} + a_{n+2}$, или $a_{n+3} - a_{n+2} \leqslant a_{n+1} - a_n$ при $n = 1, 2, \ldots, 100$. Значит, $a_{100} - a_{99} \leqslant a_{98} - a_{97} \leqslant \ldots \leqslant a_2 - a_1 \leqslant a_{100} - a_{99}$, что означает, что все эти неравенства обращаются в равенства. Итак, $a_{2n} - a_{2n-1} = k$ при всех $n = 1, 2, \ldots, 50$, и аналогично $a_{2n+1} - a_{2n} = \ell$ при $n = 1, 2, \ldots, 50$. Просуммировав все 100 полученных равенств, получаем $0 = 50k + 50\ell$, откуда $k = -\ell$. Но тогда $a_3 - a_2 = \ell = -k = -(a_2 - a_1) = a_1 - a_2$, то есть $a_1 = a_3$. Это противоречит условию.

9.3. **Первое решение.** Пусть M — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ACE и BCD (она есть, так как в случае касания прямые AE и BD были бы параллельны). Нам достаточно показать, что описанная окружность треугольника OCI также проходит через точку M, так как в этом случае центры всех трех окружностей из условия будут лежать на серединном перпендикуляре к отрезку CM.

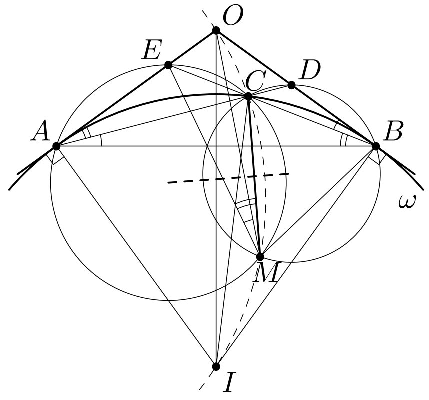

Рис. 1

Обозначим $\angle CAB = \alpha$ и $\angle CBA = \beta$; без ограничения общности можно считать, что $\beta > \alpha$. По свойству угла между хордой и касательной, $\angle OBE = \alpha$, аналогично $\angle DAE = \beta$ (см. рис. 1). В четырёхугольнике $OBIA$ углы A и B прямые, поэтому он — вписанный; значит, $\angle OIA = \angle OBA = \alpha + \beta$. Следовательно, $\angle CIO = \angle CIA - \angle OIA = 2\angle CBA - (\alpha+\beta) = \beta - \alpha$. Для того, чтобы доказать, что точка M лежит на описанной окружности треугольника OCI, нам достаточно показать равенство $\angle CMO = \beta - \alpha$.

Поскольку четырёхугольники $AECM$ и $DBMC$ вписаны, получаем $\angle BME = \angle BMC + \angle CME = (180^\circ - \angle CDB) + \angle CAE = \angle ODA + \angle DAO = 180^\circ - \angle EOB$, то есть четырехугольник $EOBM$ также вписан, и $\angle OME = \angle OBE = \alpha$. Следовательно, $\angle CMO = \angle CME - \angle OME = \angle CAE - \alpha = \beta - \alpha$, что и требовалось доказать.

Замечание. Точка M является *точкой Микеля* четырехсторонника, образованного прямыми AC, BC, AO и BO, то есть точка M будет лежать на описанной окружности треугольника, образованного любыми тремя из этих четырех прямых. Таким образом точка M будет лежать не только на описанных окружностях треугольников AEC, BCD, EOB, как мы показали, но и на описанной окружности треугольника AOD.

Второе решение. Поскольку $\angle OAI = \angle OBI = 90^\circ$, четырёхугольник $OAIB$ вписан в некоторую окружность Ω. Обозна-

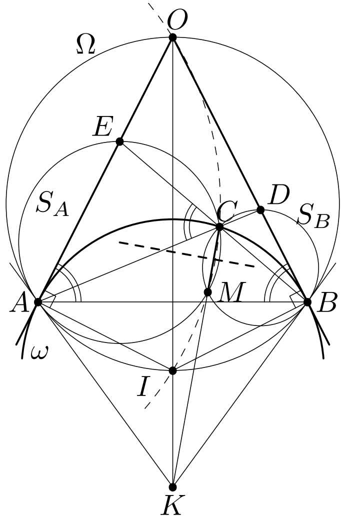

Рис. 2

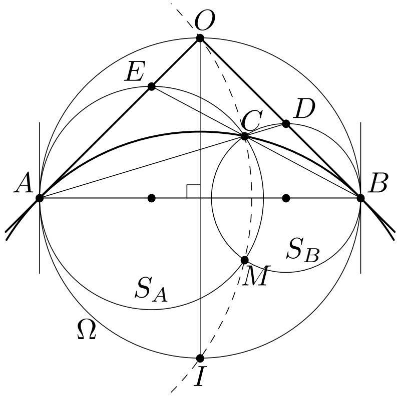

Рис. 3

чим через S_A и S_B описанные окружности треугольников ACE и BCD, а через M — вторую точку их пересечения. Поскольку BO — касательная к ω, имеем $\angle ABO = 180^\circ - \angle ACB = \angle ACE$. Поскольку эти углы в окружностях Ω и S_A стягиваются хордами AO и AE, лежащими на одном луче AO, то по теореме об угле между касательной и хордой касательные к Ω и S_A в точке A совпадают. Аналогично, касательные к S_B и Ω в точке B также совпадают.

Пусть касательные к Ω в точках A и B пересекаются в точке K (см. рис. 2). Из симметрии, K лежит на прямой OI. Тогда точка K является радикальным центром окружностей S_A, S_B и Ω, поэтому она лежит на прямой CM. Но тогда $KM \cdot KC = KA^2 = KO \cdot KI$, а значит, точка M лежит на описанной окружности треугольника OIC. Это значит, что центр этой окружности, а также центры окружностей S_A и S_B лежат на серединном перпендикуляре к их общей хорде CM, что и требовалось.

Если же касательные к Ω в точках A и B параллельны (см. рис. 3), то прямая AB содержит диаметры окружностей S_A и

S_B, а также является серединным перпендикуляром к OI, то есть содержит центр описанной окружности треугольника OIC.

9.4. Все веса в решении будут измеряться в граммах. Назовём кусок яблока (или само яблоко) *большим*, если его вес не меньше 25.

Докажем индукцией по n, что n больших яблок суммарного веса $100n$ можно разрезать на большие куски и раздать n детям поровну.

База при $n = 1$ очевидна. Пусть $n > 1$. Рассмотрим два самых тяжёлых яблока; пусть их веса $a \geqslant b$. Заметим, что $a + b \geqslant 200$ (иначе средний вес одного яблока будет меньше, чем $200/2 = 100$). Выкинем эти два яблока из набора и добавим в него яблоко веса $c = a + b - 100 \geqslant 100$. По предположению индукции, полученный набор можно разрезать на большие куски и раздать $n-1$ детям поровну. Если при этом какой-то кусок нового яблока оказался больше 50, разрежем его на два больших куска. Через несколько таких разрезаний мы придём к ситуации, когда новое яблоко разделено на куски весов $c_1, c_2, \ldots, c_k$, не превосходящих 50. Обозначим $s_d = c_1 + \ldots + c_d$ при $d = 1, 2, \ldots, k$ и положим $s_0 = 0$.

Покажем теперь, как разрезать исходный набор. Все яблоки, кроме a и b, разрежем так же, как и в новом наборе. Заметим, что $a \geqslant 200/2 = 100$. Обозначим через t минимальный индекс такой, что $a - s_t \leqslant 75$ и отрежем от a куски $c_1, \ldots, c_t$, а от b — куски $c_{t+1}, \ldots, c_k$. Заметим, что $a - s_{t-1} > 75$, поэтому от a остался кусок $a' = a - s_t = (a - s_{t-1}) - c_t$ такой, что $75 \geqslant a' > 75 - c_t \geqslant 25$. От b же остался кусок b' такой, что $a' + b' = a + b - c = 100$, поэтому $25 \leqslant b' \leqslant 75$. Итак, можно a' и b' отдать одному ребёнку, а остальные куски распределить между остальными детьми так же, как это делалось в новом наборе. Утверждение доказано.

Замечание. В доказанном *общем* утверждении число 25 нельзя заменить на большее, не зависящее от n.