10 класс

Задача 1. Скольжение груза по доске

1. Обозначим силу натяжения нити через T. Запишем второй закон Ньютона для всех трёх тел:

$$m_1a_1 = T - F_{\text{тр}}, \qquad m_2a_2 = F_{\text{тр}}, \qquad Ma_1 = Mg - T.$$

Здесь a_1 и a_2 — ускорения груза и доски соответственно. Из этих уравнений получим:

$$a_1 = \frac{Mg - F_{\text{тр}}}{m_1 + M}, \qquad a_2 = \frac{F_{\text{тр}}}{m_2}.$$

При движении без проскальзывания $a_1 = a_2$:

$$\frac{Mg - F_{\text{тр}}}{m_1 + M} = \frac{F_{\text{тр}}}{m_2}, \qquad \text{откуда} \qquad F_{\text{тр}} = \frac{Mm_2}{m_1 + m_2 + M}g.$$

При этом сила трения по модулю не превышает значения $\mu m_1 g$. Следовательно, для движения без проскальзывания необходимо:

$$F_{\text{тр}} = \frac{Mm_2}{m_1 + m_2 + M}g \leqslant \mu m_1 g, \qquad \text{откуда} \qquad \mu_{\min} = \frac{Mm_2}{m_1(m_1 + m_2 + M)}.$$

2. Подставляя числовые значения масс всех грузов, получим:

$$\mu_{\min} = 1/2.$$

При $\mu \geqslant \mu_{\min}$ скольжения нет, а при $\mu < \mu_{\min}$ груз будет скользить по доске.

3. Пусть теперь $\mu = \mu_{\min}/2 = 1/4$, тогда:

$$a_1 = \frac{M - m_1\mu}{m_1 + M}g, \qquad a_2 = \frac{m_1}{m_2}\mu g.$$

Относительное ускорение:

$$a_{\text{отн}} = a_1 - a_2 = g\left(\frac{M - m_1\mu}{m_1 + M} - \frac{m_1}{m_2}\mu\right) = g/4.$$

Время соскальзывания находим из формулы $L = a_{\text{отн}}t^2/2$:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_{\text{отн}}}} = 0{,}9 \text{ с}.$$

Критерии оценивания

Записан второй закон Ньютона для каждого из трёх тел 2

Найдены ускорения груза и доски 1

Определено, при каких $F_{\text{тр}}$ груз проскальзывает 2
Указано значение силы трения при проскальзывании 1
Определён $\mu_{\min}$ 1
Найдены ускорения доски и груза при $\mu = \mu_{\min}/4$ 1
Найдено относительное ускорение 1
Найдено время соскальзывания 1

Задача 2. Диссоциация

Пусть ν — число молей O_2 до диссоциации, α — часть диссоциированных молекул. Число молей молекулярного кислорода O_2 после диссоциации $\nu_2 = (1-\alpha)\nu$, число молей атомарного кислорода O $\nu_1 = 2\alpha\nu$.

Запишем уравнения состояния для молекулярного и атомарного кислорода:

$$p_{O_2}V = \nu_2 RT = (1-\alpha)\nu RT, \qquad p_O V = \nu_1 RT = 2\alpha\nu RT.$$

Согласно закону Дальтона $p = p_{O_2} + p_O$, откуда:

$$pV = (1+\alpha)\nu RT = \frac{m}{\mu_2}RT(1+\alpha).$$

где μ_2 — молярная масса O_2. Последнее уравнение можно переписать в виде:

$$p = \frac{\rho}{\mu_2}RT(1+\alpha) \qquad \text{или} \qquad \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 = \frac{RT_2}{\mu_2}(1+\alpha), \tag{13}$$

где индекс 2 означает, что это соотношение относится ко второму циклу.

Аналогично для первого цикла:

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_1 = \frac{RT_1}{\mu_2}. \tag{14}$$

Соотношения (13) и (14) связывают отношение p/ρ с температурой T в любой точке циклов 1 и 2. В частности они справедливы для точек с максимальными температурами на циклах 1 и 2:

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_{1,\max} = \frac{RT_{1,\max}}{\mu_2}, \qquad \left(\frac{p}{\rho}\right)_{2,\max} = \frac{RT_{2,\max}}{\mu_2}(1+\alpha).$$

Величины $(p/\rho)_{1,\max}$ и $(p/\rho)_{2,\max}$ можно определить по наклону касательных к циклам 1 и 2, проведённых из начала координат (рис. 20). Для определения абсолютных значений этих величин нужно знать значения масштабных коэффициентов ρ_0 и p_0, использованных при построении графиков циклов. Но безразмерное отношение $r_{\max} = \left[(p/\rho)_{2,\max} \,/\, (p/\rho)_{1,\max}\right]$ не зависит от масштабных коэффициентов ρ_0 и p_0. Его можно определить, проведя касательные к циклам 1 и 2 с минимальным наклоном к оси абсцисс. По графику:

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_{2,\max} = 2{,}4, \qquad \left(\frac{p}{\rho}\right)_{1,\max} = 0{,}4, \qquad \text{то есть} \qquad r_{\max} = 6.$$

Следовательно:

$$\frac{T_{2,\max}}{T_{1,\max}}(1+\alpha) = k(1+\alpha) = 6, \qquad \text{отсюда} \qquad \alpha = 0{,}2.$$

Определим теперь отношение $T_{2,\min}/T_{1,\min}$. Для этого нужно провести касательные к циклам 1 и 2 с максимальным наклоном к оси абсцисс. По графикам циклов находим:

$$r_{\min} = 11, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{T_{2,\min}}{T_{1,\min}} = \frac{11}{1+\alpha} \approx 9{,}2.$$

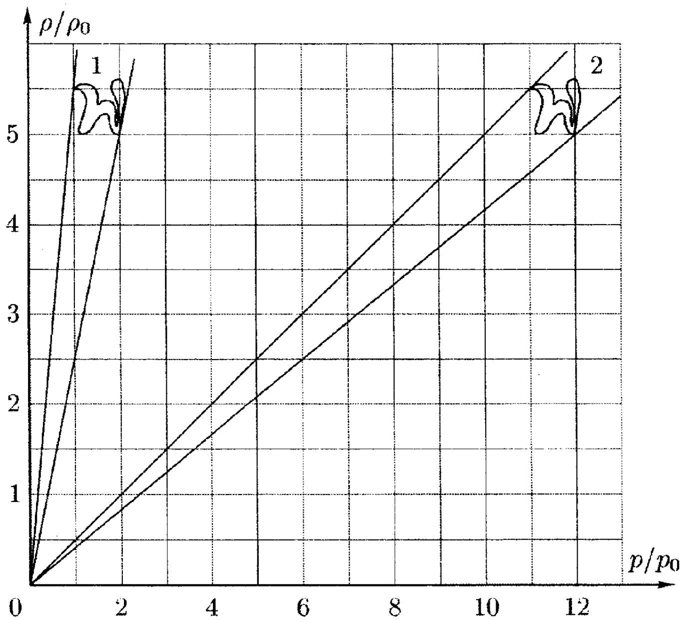

Рис. 20

Критерии оценивания

Приведены выражения для ν_1 и ν_2 через α и ν 2
Найдено выражение для $(p/\rho)_2$ 1
Найдено выражение для $(p/\rho)_1$ 1
Описан способ нахождения $r_{\max}$ по графику 3
Найдено численное значение для $r_{\max}$ 1
Определена степень диссоциации α 1
Найдено отношение $T_{2,\min}/T_{1,\min}$ 1

Задача 3. Шайба на наклонной плоскости

При отсутствии трения время возврата:

$$t_0 = \frac{2v_0}{g\sin\alpha}.$$

При наличии сухого трения шайба скользит вверх по наклонной плоскости с отрицательным ускорением, равным по модулю:

$$a_1 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Время t_1 подъёма шайбы до остановки:

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

При этом шайба до остановки пройдёт путь:

$$S = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = t_1\left(v_0 - \frac{v_0}{2}\right) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

После остановки в верхней точке шайба начнёт скользить вниз по наклонной плоскости при условии $\mu < \operatorname{tg}\alpha$. В этом случае ускорение шайбы:

$$a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Время t_2 спуска найдём по формуле $t_2^2 = \dfrac{2S}{a_2}$:

$$t_2 = \frac{v_0}{g}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}.$$

Время t_μ возврата шайбы:

$$t_\mu = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{g}\left(\frac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}\right)$$

Введём обозначение:

$$x = \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Тогда выражение для t_μ можно преобразовать к виду:

$$t_\mu = \frac{v_0}{g\sin\alpha}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

При $x \to 1$ $t_\mu \to \infty$. Найдём условие, при котором $t_\mu = t_0$.

Приравняв $t_\mu = t_0$, получим:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2.$$

Это уравнение можно привести к виду:

$$\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + 2x, \qquad \text{откуда} \qquad x - 2x^3 = 0.$$

Так как $x \geqslant 0$, то корнями этого уравнения являются $x_1 = 0$ и $x_2 = 1/\sqrt{2}$. Первое значение соответствует движению без трения, а для второго решения $\mu_0 = \operatorname{tg}\alpha/\sqrt{2}$. При $\mu > \mu_0$ время возврата $t_\mu > t_0$.

Критерии оценивания

Найдено время t_0 1
Определено, при каких μ шайба вернётся назад 1
Определено время t_μ возврата при наличии трения 4
Найден μ, при котором $t_\mu = t_0$ 4

Задача 4. Варистор

1. Пусть сила тока $I = I_0$. Обозначим через $I_н$ и $I_в$ силы токов, текущих соответственно через резистор и варистор (рис. 21). Тогда напряжение на варисторе:

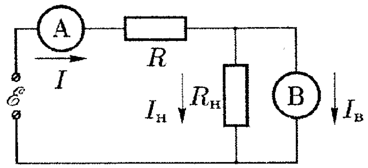

Рис. 21

$$\mathscr{E} - IR = U_в = I_н R_н = (I - I_в)R_н.$$

Отсюда следует, что для определения $I_{в1}$ и $U_{в1}$ на графике ВАХ нужно построить прямую линию $I_в = I - U_в/R_н$, называемую нагрузочной характеристикой. Строим этот линейный график: при $U_в = 0$, $I_в = I = I_0 = 1$ А, а при $I_в = 0$, $U_в = I_0 R_н = 10$ В. Откладываем по осям $I_в = 1$ А, $U_в = 10$ В (рис. 22).

Находим по графику: $I_{в1} \approx 0{,}36$ А, $U_{в1} = U_{н1} \approx 6{,}4$ В.

Из уравнения $\mathscr{E} = U_в + IR$ находим:

$$\mathscr{E}_1 = U_{в1} + I_0 R = 16{,}4 \text{ В}.$$

2. Напряжение источника возросло и стало равным $\mathscr{E}_2 = 2\mathscr{E}_1 = 32{,}8$ В. Найдём связь $U_в$ и $I_н$:

$$\mathscr{E}_2 - IR = \mathscr{E}_2 - (I_н + I_в)R = U_в, \qquad \text{а поскольку} \qquad I_н = \frac{U_в}{R_н},$$

имеем:

$$\mathscr{E}_2 - \frac{U_в}{R_н}R - I_в R = U_в.$$

Получаем уравнение прямой:

$$I_в = \frac{\mathscr{E}_2}{R} - U_в\left(\frac{1}{R_н} + \frac{1}{R}\right).$$

Отложим по осям:

$$I_в = 0, \qquad U_в = \frac{\mathscr{E}_2 R_н}{R_н + R} = 16{,}4 \text{ В},$$

$$U_в = 0, \qquad I_в = \frac{\mathscr{E}_2}{R} \approx 3{,}3 \text{ А}.$$

Построим нагрузочную характеристику и найдём:

$$I_{в2} \approx 1{,}42 \text{ А}, \qquad U_{в2} \approx 9{,}2 \text{ В},$$

$$\Delta U_н = \Delta U_в = U_{в2} - U_{в1} = 2{,}8 \text{ В}, \qquad и \qquad \Delta I_в = 1{,}42 - 0{,}36 \approx 1{,}1 \text{ А}.$$

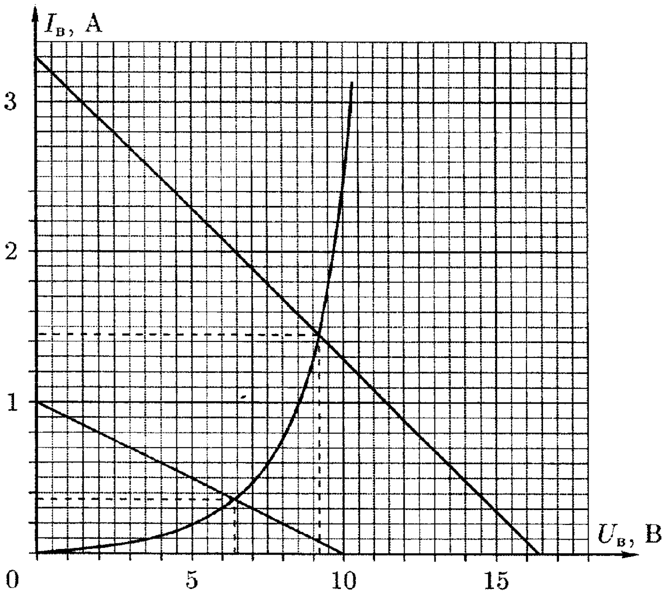

Рис. 22

Критерии оценивания

Найдена нагрузочная характеристика в первом случае 1
Построена нагрузочная характеристика в первом случае 2
Определена $\mathscr{E}_1$ 1
Найдена нагрузочная характеристика во стором случае 2

Построена нагрузочная характеристика во втором случае 2
Определены $\Delta U_н$ и $\Delta I_в$ 2

Задача 5. Цепь с двумя конденсаторами

1. Найдем заряд на конденсаторах:

$$\mathscr{E} = \frac{q}{2C} + \frac{q}{C},$$

откуда $q = 2C\mathscr{E}/3$. Тогда напряжения на конденсаторах:

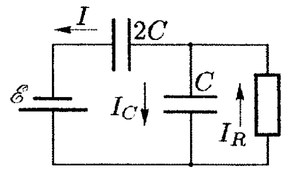

Рис. 23

$$U_C = \frac{2\mathscr{E}}{3}, \qquad U_{2C} = \frac{\mathscr{E}}{3}.$$

2. Пусть сразу после замыкания ключа K_2 сила тока через аккумулятор равна I, через конденсатор C — I_C, а через резистор — I_R (рис. 23).

В процессе перезарядки сумма напряжений на конденсаторах в любой момент времени равна $\mathscr{E}$, следовательно:

$$\frac{I_C dt}{C} = \frac{I dt}{2C}.$$

Получаем $I = 2I_C$, откуда:

$$I_R = I + I_C = \frac{3}{2}I = \frac{U_C}{R}.$$

Следовательно, когда сила тока через батарею уменьшится в два раза, новый заряд на C также уменьшится в два раза, то есть:

$$q'_C = \frac{q}{2} = \frac{C\mathscr{E}}{3}.$$

Найдём заряд на $2C$:

$$q'_{2C} = 2C\left(\mathscr{E} - \frac{q'_C}{C}\right) = \frac{4C\mathscr{E}}{3}.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$A = Q + (W'_C - W_C) + (W'_{2C} - W_{2C}),$$

где W — энергия конденсатора, $A = \mathscr{E}\Delta q$ — работа аккумулятора.

Получаем:

$$Q = \mathscr{E}(q'_{2C} - q) - \left(\frac{q'^2_C}{2C} - \frac{q^2}{2C}\right) - \left(\frac{q'^2_{2C}}{4C} - \frac{q^2}{4C}\right).$$