

4 задачи, время – 120 мин., 60 баллов

№№ задач	1	2	3	4
Кол-во баллов	20	10	10	20

1. Задача 1. (20 баллов)

В королевстве N каждый предприниматель должен приобрести у короля лицензию, дающую право на ведение собственного бизнеса. Лицензии выдает специальный чиновник, назначенный королем. Чиновник, осознав свое исключительное положение, начал в дополнение к официальной плате, которая составляет 20 у.е. за одну лицензию, брать взятки за каждую выданную лицензию, причем размер взятки одинаков для всех предпринимателей. Выдача одной лицензий сопряжена для чиновника с издержками, равными 10 у.е. Чиновник получает фиксированное жалование в 50 у.е. и, кроме того, чиновнику выплачивается компенсация в 10 у.е. за каждую лицензию, плата за которую поступила в королевскую казну. Пусть спрос на лицензии задается функцией $Q=100-p$, где p – цена лицензии, включая взятку.

(6 баллов) (а) Спрос на лицензии королю неизвестен. Однако король может проверить, сколько лицензий в действительности выдал чиновник, а потому вся официальная плата за выданные лицензии должна поступать в казну, так как любая недостача будет автоматически взыскана с чиновника и, кроме того, чиновник будет лишен жалования. Какой размер взятки назначит чиновник в этих условиях? Какой выигрыш он получит в результате своей деятельности?

(7 баллов) (б) Предположим, что король не может узнать, сколько в действительности было выдано лицензий. Найдите оптимальный размер взятки в новой ситуации.

(7 баллов) (в) Если бы король стремился пополнить казну, то какую максимальную плату он должен был бы установить за одну лицензию в ситуации, когда количество выданных лицензий ему неизвестно?

Решение:

(а) Чиновник получает доход от продажи лицензий $(100-p)*p$, в казну уходит $20(100-p)$ у.е., компенсация чиновнику составляет $10(100-p)$, столько же составляют его издержки. Фиксированное жалование 50.

Тогда выигрыш чиновника составит $(100-p)p-20(100-p)+50$

Функция выигрыша чиновника 3 балла

Решение задачи чиновника 1 балл

Максимум выигрыш достигает при $p=60$ у.е.

Определение размера взятки 2 балла

Тогда размер взятки составит $60-20=40$ у.е

(б) В этом случае, чиновник максимизирует свой доход от выдачи лицензий без учета официальной платы в казну, однако он учитывает то, что за каждую лицензию ему выдается 10 у.е. компенсации

Заметим, что у чиновника есть два варианта поведения: либо он будет честно сообщать о выдаваемых лицензиях и получать компенсацию своих расходов (эта ситуация была проанализирована в пункте (а)), либо он будет полностью утаивать свой доход, но тогда он будет вынужден нести расходы сам.

Найдем максимальную прибыль чиновника в последнем случае, решив задачу $\max((100-p)p - 10(100-p) + 50)$ - **2 балла**

Решение задачи, определение величины взятки – 2 балла

Тогда оптимальный для чиновника размер цены лицензии $p=55$ и оптимальный размер взятки будет составлять 35.

Сравнение прибылей для двух ситуаций и выбор наилучшего варианта – 3 балла

Прибыль чиновника составит $65 \cdot 25 + 50 = 1675$ по сравнению с прибылью в $40 \cdot 40 + 50 = 1650$ в случае (а).

Вывод: Чиновнику выгодно умалчивать о количестве выданных лицензий. Оптимальный размер взятки будет равен 35.

(в) Объявляя о выданной лицензии, чиновник вынужден передать в казну ее официальную стоимость, но зато он получает покрытие своих расходов в 10 у.е., то есть чистый выигрыш 10-плата за лицензию. **3 балла**

Таким образом, максимальный размер официальной платы может составлять 10 у.е., то есть это величина, равная альтернативным издержкам чиновника. **4 балла**

Задача 2. (10 баллов)

Химический завод загрязняет воду, сливая в реку свои отходы. Это вызывает загрязнение воды и наносит ущерб расположенной вниз по течению ферме в размере X у.е. Завод мог бы очищать свои стоки, что привело бы к дополнительным издержкам в размере 3000 у.е. Ферма также может проводить дополнительную очистку воды, что повысит ее издержки на 5000 у.е.

(5 баллов) (а) Пусть $X=2000$ у.е. Найдите наилучшее для общества решение: стоит ли очищать воду и, если стоит, то очищать ли воду на химзаводе или использовать дополнительную очистку на ферме.

(5 балла) (б) Пусть $X=4000$ у.е. Предположим, что химзавод и ферма ведут переговоры относительно очистки вод. Поскольку действующий закон разрешает химическому заводу сбрасывать в воду свои стоки, то ферма предлагает химзаводу компенсацию за то, чтобы завод очищал свои стоки перед сбросом. Завод может лишь принять или отвергнуть сделанное фермой предложение. Будет ли достигнуто эффективное с точки зрения общества решение, если химический завод и ферма обладают полной информацией об издержках и выгоде от очистки, и не несут никаких дополнительных издержек в связи с переговорами?

Решение:

(а)

Оценим потери общества (суммарные потери фермы и завода) в каждом из возможных вариантов

Если вода не будет очищена, потери общества составят 2000 у.е.

Если воду очищает завод, потери будут 3000 у.е.

Если воду очищает ферма, потери общества 5000 у.е.

Вывод: потери общества минимальны в случае, если очистки воды не происходит. **(5 баллов)**

(б)

Химзавод примет предложение фермы о компенсации за очистку стоков лишь в случае, если ему заплатят сумму, равную или превышающую 3000 у.е (стоимость очистки воды для завода). **(1 балл)**

Ферма в условиях полной информации знает об этом, и предложит ему ровно 3000 у.е, так как все остальные варианты приводят к большим потерям для фермы (самостоятельная очистка – 5000 у.е, отсутствие очистки – 4000 у.е) **(2 балла)**

Это решение будет эффективным для общества, так как общественные потери в этом случае будут минимальными (3000 у.е). Таким образом, торг привел к эффективному с точки зрения общества решению. **(2 балла)**

Задача 3 (10 баллов).

Рассмотрите закрытую экономику, предложение труда в которой представлено функцией $L^S = 8000W/P$, где W - ставка номинальной заработной платы, а P - уровень цен. ВВП данной экономики создается лишь с помощью труда в соответствии со следующей производственной функцией: $F(L) = 2\sqrt{L}$, где L - занятость в часах. Кривая совокупного спроса задана уравнением $Y = 2M/P$, где M - номинальное предложение денег, а P - уровень цен. Считайте, что все рынки в экономике совершенно конкурентны. Найдите уровень цен, ставку реальной заработной платы и выпуск в долгосрочном равновесии, если $M = 25$.

Решение:

1. Рассчитываем спрос на труд фирм.

Выпишем функцию прибыли

$$\pi = P * 2\sqrt{L} - WL$$

Приравниваем производную прибыли по количеству работников к нулю

$$\frac{P}{\sqrt{L}} - W = 0 \text{ или } L = \left(\frac{P}{W}\right)^2.$$

Заметим, что производная $\frac{P}{\sqrt{L}} - W$ функции прибыли убывает при всех $L > 0$ и

прибыль равна нулю, если $L = 0$, Это означает, что найденное значение количества работников приводит к максимуму прибыли при данном уровне цен P и ставке номинальной заработной платы W .

Тогда спрос фирм на труд равен $L = \left(\frac{P}{W}\right)^2$ - **4 балла**

2. Находим равновесие на рынке труда и уровень потенциального выпуска.

$$8000 \frac{W}{P} = \left(\frac{P}{W}\right)^2$$

$$W/P = 1/20 \text{ 2 балла} \quad L=400 \text{ 2 балла}$$

Тогда из производственной функции объем потенциального выпуска равен $2*20=40$ **1 балл**

3. Вычисляем кривую совокупного спроса.

При $M=25$

$$Y = 50/P$$

Тогда при выпуске 40 уровень цен равен $5/4$ **3 балла**

Ответ. Уровень цен $P = \frac{5}{4}$

Ставка реальной заработной платы $W/P = 1/20$

Выпуск в долгосрочном равновесии $Y = 40$

Задача 4 (20 баллов).

Предположим, что спрос на продукцию монополиста внутри страны задан функцией $Q^D(P_h) = 100 - P_h$, где P_h – цена на внутреннем рынке. Функция издержек монополиста имеет вид: $TC(Q) = Q^2/2$. Монополист может продавать свою продукцию как на внутреннем рынке, так и на конкурентном рынке за рубежом по цене P_f . Монополист выбирает объемы производства и продаж на двух рынках, максимизирующие его прибыль.

(Вы можете предполагать, что такие объемы существуют в каждой и рассматриваемых ниже ситуаций).

(3 балла) (а) Докажите, что совокупный объем продаж монополиста при любых ценах на зарубежном рынке и любом спросе на отечественном рынке не может быть равным нулю.

(6 балла) (б) Докажите, что монополист получает на каждом рынке, где он продает свою продукцию, одну и ту же выручку от продажи последней ее единицы, которая к тому же не ниже выручки от продажи этой единицы на том рынке, где продаж нет.

(4 балла) (в) Докажите, что на каждом рынке, где осуществляются продажи, выручка от продажи последней единицы будет равна предельным издержкам производства.

(4 балла) (г) Докажите, что монополист заинтересован в продажах на отечественном рынке тогда и только тогда, когда максимальная цена на зарубежном рынке будет ниже 100.

(3 балла) (д) Как зависит объем продаж на отечественном рынке от цены за рубежом, если продажи на обоих рынках положительны?

Решение:

(а) От противного. Пусть $Q=0$, тогда $\pi(0)=0$. **1 балл**

Покажем, что это решение не максимизирует прибыль фирмы, так как найдется положительный выпуск \tilde{Q} , приносящий более высокую прибыль.

Пусть $\tilde{Q} = q_h > 0$. Тогда $\pi(\tilde{Q}) = (100 - q_h)q_h - 0.5(q_h)^2 = (100 - 1.5q_h)q_h > 0 = \pi(0)$ при $0 < q_h < 100/1.5$. Это противоречит гипотезе о том, что нулевой выпуск приносит максимальную прибыль. Таким образом, оптимальный объем продаж будет положительным. **2 балла**

(б) Докажем первую часть утверждения. Пусть $q_h > 0$ и $q_f > 0$. Покажем, что $MR_h(q_h) = MR_f(q_f)$. От противного, пусть $MR_h(q_h) \neq MR_f(q_f)$. Без ограничения общности можем считать, что $MR_h(q_h) > MR_f(q_f)$. Поскольку мировой рынок совершенно конкурентен, то $MR_f(q_f) = P_f$, для внутреннего рынка $MR_h(q_h) = 100 - 2q_h$. Покажем, что перераспределив продажи в сторону рынка с большей величиной предельной выручки (в данном случае в пользу внутреннего рынка), мы сможем увеличить прибыль. **1 балл**

Пусть $\Delta q_h = a > 0$ и $\Delta q_f = -a < 0$.

Поскольку совокупный выпуск при этом не изменился ($\Delta Q = \Delta q_h + \Delta q_f = 0$), то издержки монополиста остались прежними, а прибыль будет меняться лишь в силу изменения выручки:

$$\Delta \pi = (100 - q_h - a)(q_h + a) - (100 - q_h)q_h - P_f a = -a(q_h + a) + a(100 - q_h) - P_f a = a(100 - 2q_h - a - P_f) > 0$$

при $0 < a < (100 - 2q_h - P_f)$. Заметим, что множество решений данного неравенство не пусто, поскольку по условию $MR_h(q_h) - MR_f(q_f) = 100 - 2q_h - P_f > 0$. **2 балла**

Итак, мы показали, что исходная прибыль при различных значениях предельной выручки может быть увеличена. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Докажем вторую часть утверждения. Пусть $q_h = 0$. Покажем, что $MR_h(q_h) = 100 - 2q_h = 100 \geq P_f$. Пусть это неверно $MR_h(q_h) = 100 < P_f$. Тогда перераспределив продажи в пользу внутреннего рынка, мы сможем увеличить прибыль. **1 балл**

Пусть $\Delta q_h = -\Delta q_f = a > 0$. Поскольку совокупный выпуск не изменился, то издержки будут прежними, а изменение прибыли составит

$$\Delta \pi = (100 - a)a - P_f a = a(100 - a - P_f) > 0 \text{ при } 0 < a < \max\{(100 - P_f), q_f\}. \text{ 2 балла}$$

(в) Пусть $q_f > 0$. Покажем, что $MR_f(q_f) = MC(Q)$, то есть $P_f = Q$. От противного, пусть $P_f \neq Q$. Без ограничения общности можно считать, что $P_f > Q$. Покажем, что, произведя дополнительный выпуск в объеме b и продав его за рубежом, монополист смог бы увеличить свою прибыль: **1 балл**

$$\Delta \pi = P_f b - [0.5(Q + b)^2 - 0.5Q^2] = b(P_f - Q - 0.5b) > 0 \text{ при } 0 < b < 2(P_f - Q). \text{ Заметим, что множество решений данного неравенство не пусто, так как по условию } P_f > Q. \text{ 1 балл}$$

Покажем, что аналогичное условие верно и для внутреннего рынка. Пусть $q_h > 0$. Покажем, что $MR_h(q_h) = MC(Q)$, то есть $100 - 2q_h = Q$. От противного, пусть $100 - 2q_h \neq Q$. Без ограничения общности можно считать, что $100 - 2q_h > Q$. Покажем, что, произведя дополнительный выпуск в объеме b и продав его на внутреннем рынке, монополист смог бы увеличить свою прибыль: **1 балл**

$$\Delta \pi = (100 - q_h - b)(q_h + b) - (100 - q_h)q_h - 0.5(Q + b)^2 + 0.5Q^2 = b(100 - 2q_h - 1.5b - Q) > 0 \text{ при } 0 < b < (100 - 2q_h - Q)/1.5. \text{ Множество решений данного неравенства не пусто, так как по условию } 100 - 2q_h > Q. \text{ 1 балл}$$

(г) Пусть $P_f < 100$. Покажем, что $q_h > 0$. От противного, пусть $q_h = 0$. Тогда в силу пункта (а) $Q = q_f > 0$. При $q_h = 0$ имеем $MR_h(q_h) = 100 > P_f = MR_f(q_f)$, что противоречит утверждению, доказанному в пункте (б). **2 балла.** Итак, $q_h > 0$.

Покажем, что верно и обратное. Пусть $q_h > 0$. Докажем, что $P_f < 100$. От противного, пусть $P_f \geq 100$. Тогда $MR_h(q_h) = 100 - 2q_h < 100 \leq P_f = MR_f(q_f)$. В соответствии с пунктом (б), предельные выручка на внутреннем рынке может быть ниже лишь при $q_h = 0$. Полученное противоречие доказывает исходное утверждение. **2 балла**

(д) Если продажи на обоих рынках положительных, то согласно условию (б) имеем $MR_h(q_h) = 100 - 2q_h = MR_f(q_f) = P_f$, откуда находим $q_h = (100 - P_f)/2$. **2 балла.** Таким образом, повышение цены за рубежом приводит к падению продаж на внутреннем рынке. **1 балл**

Жюри рассматривает записи решений, приведенные в чистовике. Черновик работы может быть рассмотрен жюри, если на него есть ссылка в самой работе. То есть участник конкретно указывает на какой-то материал в черновике. В черновике для ясности его тоже нужно пометить.

Решение каждой задачи оценивается жюри в соответствии с количеством баллов, установленных для задачи. По каким-то конкретным пунктам задачи полный балл может быть не выставлен. Получение отрицательных баллов за задачу невозможно.

Проверка задач осуществляется Жюри олимпиады, согласно следующим критериям оценивания решения задач:

Процент от максимального количества баллов	Правильность (ошибочность) решения
100	Полное верное решение. В логическом рассуждении и решении нет ошибок, задача решена рациональным способом. Получен правильный ответ. Ясно описан способ решения.
80-100	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение, такие как, небольшие логические пропуски, не связанные с основной идеей решения. Решение оформлено не вполне аккуратно, но это не мешает пониманию решения.
65-80	Решение в целом верное. В логическом рассуждении и решении нет существенных ошибок, но задача решена неоптимальным способом или допущено не более двух незначительных ошибок. В работе присутствуют арифметическая ошибка, механическая ошибка или описка при переписывании выкладок или ответа, не исказившие экономическое содержание ответа.
45-65	В логическом рассуждении и решении нет ошибок, но допускается существенная ошибка в математических расчетах. Отсутствует график, необходимый для понимания решения. При объяснении сложного экономического явления указаны не все существенные факторы.
30-45	Имеются существенные ошибки в логическом рассуждении и в решении. Рассчитанное значение искомой величины искажает экономическое содержание ответа. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-30	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения. Отсутствие окончательного численного ответа, если он предусматривается в задаче. Если правильный ответ необоснованно угадан, а решение безосновательно под него выстроено.
0	Решение неверное или отсутствует.