Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа

XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2009–2010 учебный год

Первый день

19–20 января 2010 г.

Москва, 2009

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, В.В. Астахов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.И. Гарбер, А.А. Глазырин, С.А. Дориченко, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, М.И. Исаев, Р.Н. Карасёв, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.М. Райгородский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2009–2010 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 19 и 20 января 2010 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

10 класс

10.1. Девять лыжников ушли со старта по очереди и прошли дистанцию — каждый со своей постоянной скоростью. Могло ли оказаться, что каждый лыжник участвовал ровно в четырёх обгонах? (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника — тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) (*С. Волчёнков, И. Богданов*)

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что это возможно. Так как скорости постоянны, каждые два лыжника встречались не более одного раза. Тогда лыжник, стартовавший первым, не мог никого обогнать; значит, его обогнали четверо, и он пришел пятым. С другой стороны, лыжника, стартовавшего последним, никто не мог обогнать, поэтому он сам обогнал четверых и также пришел пятым. Противоречие.

Замечание. Аналогичное рассуждение показывает, что и первым, и последним в гонке мог прийти только лыжник номер 5.

Комментарий. Показано, что стартовавший первым (либо стартовавший последним) пришел на финиш пятым — 3 балла. Показано, что стартовавший пятым пришел первым (последним) — 3 балла.

10.2. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим противное. Ясно, что $k \geqslant 10$, так как в наборе цифр от 1 до 9 нет повторяющихся. Рассмотрим наибольшую степень десятки 10^n, не превосходящую k. Последовательность цифр числа 10^n целиком войдет в одно из составленных чисел. Но тогда такая же последовательность из единицы и n последующих нулей должна повториться во втором числе. Эта последовательность цифр не могла появиться из объединения двух или более чисел (так как натуральные числа не начинаются с нулей), значит, она содержалась в одном числе, отличном от 10^n. Но наименьшее число, отличное от 10^n и содержащее такой набор цифр, — это 10^{n+1}. Мы получили противоречие с тем, что 10^n — максимальная степень десятки, не превосходящая k.

Комментарий. Предъявлен только верный ответ (без доказательства) — 0 баллов. Присутствует идея рассматривать самую длинную последовательность нулей — 4 балла.

10.3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности. (*Д. Прокопенко*)

Решение. Для решения задачи достаточно установить, что $\angle MAI = \angle MNI$ (см. рис. 4). Пусть K — середина отрезка AD. Заметим, что $\angle MNI = \angle KNI = 90^\circ - \angle KIN = 90^\circ - (\angle ACI + {} + \angle CAI) = \frac{1}{2}(180^\circ - (\angle ACB + \angle BAC)) = \frac{1}{2}\angle ABC$.

Остаётся установить, что $\angle MAI = \frac{1}{2}\angle ABC$. Пусть M' — точка пересечения окружности, описанной около треугольника ABD, с серединным перпендикуляром к отрезку AD (точка M' лежит на дуге $\overset{\smile}{AD}$, не содержащей точку B). Тогда $AM' = DM'$, $\overset{\smile}{AM'} = \overset{\smile}{DM'}$, а значит, и $\angle M'BD = \angle M'BA$, как опирающиеся на равные дуги. Это означает, что точка M' лежит на биссектрисе угла ABC и, следовательно, M' совпадает с M.

Итак, точки A, M, D и B лежат на одной окружности, откуда $\angle MAI = \angle MBD = \frac{1}{2}\angle ABC$, что и требовалось.

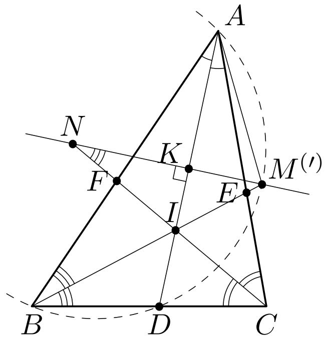

Рис. 4

Комментарий. Доказано только одно из равенств $\angle MNI = \angle ACB/2$ или $\angle NMI = \angle ABC/2$, либо доказано, что точки B, C, M, N лежат на одной окружности — 1 балл. Доказано только равенство $\angle MAI = \angle ABC/2$ (или аналогичные ему), либо доказано, что точки A, M, D и B (или A, N, D и C) лежат на одной окружности — 3 балла.

10.4. Натуральное число b назовём *удачным*, если для любого натурального a такого, что a^5 делится на b^2, число a^2 делится на b. Найдите количество удачных натуральных чисел, меньших 2010. (*П. Кожевников*)

Ответ. 1961.

Решение. Установим следующее описание удачных чисел.

Лемма. *Число b является удачным тогда и только тогда, когда каждое простое число входит в разложение b на простые множители с одним из следующих показателей:* 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8.

Доказательство. Назовем целое неотрицательное число k *счастливым*, если не существует такого целого m, что $2m < k \leqslant \frac{5}{2}m$. Заметим, что счастливыми являются в точности числа 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8. Действительно, при $k \leqslant 8$ в этом можно убедиться прямой проверкой. Если же $k \geqslant 9$, то выберем максимальное

число m такое, что $2m < k$. Тогда $m \geqslant 4$, и $\frac{5}{2}m \geqslant 2m+2 = 2(m+1) \geqslant k$ по выбору m, то есть k несчастливо. Осталось показать, что b удачно тогда и только тогда, когда каждое простое число входит в разложение b со счастливым показателем.

Пусть число b неудачно, то есть $a^5 \,\vdots\, b^2$, $a^2 \not\vdots\, b$ для некоторого a. Тогда некоторое простое p входит в разложение a^2 в меньшей степени, чем в разложение b. Пусть p входит в разложения a и b в степенях m и k соответственно; тогда $2m < k$, но $\frac{5}{2}m \geqslant k$, так как $a^5 \,\vdots\, b^2$. Значит, число k — несчастливое.

Итак, если все степени вхождения простых чисел в b счастливы, то b удачно. В противном же случае, если $b = p^k b'$, где b' не делится на p и k несчастливо ($2m < k \leqslant \frac{5}{2}m$), то при $a = p^m b'$ число a^5 делится на b^2, а a^2 не делится на b, и b неудачно. Лемма доказана. □

Подсчитаем теперь количество неудачных натуральных чисел, меньших 2010. Согласно лемме, надо подсчитать количество чисел, имеющих простой делитель, входящий в разложение на простые множители с показателем 5, 7, 9 или более 9. Поскольку $2^{10} < 2010 < 2^{11}$, $3^6 < 2010 < 3^7$, $2^5 \cdot 3^5 > 2010$ и $5^5 > 2010$, каждое неудачное число, меньшее 2010, принадлежит к одному из следующих непересекающихся классов:

1) числа вида $2^5 q$, где q — нечётное и $q \leqslant 61$ (поскольку $2^5 \cdot 61 < 2010 < 2^5 \cdot 63$);

2) числа вида $2^7 q$, где q — нечётное и $q \leqslant 15$ (поскольку $2^7 \cdot 15 < 2010 < 2^7 \cdot 17$);

3) числа вида $2^9 q$, где $q = 1$ или $q = 3$ (поскольку q нечетно, и $2^9 \cdot 3 < 2010 < 2^9 \cdot 5$);

4) число 2^{10};

5) числа вида $3^5 q$, где q не делится на 3 и $q \leqslant 8$ (поскольку $3^5 \cdot 8 < 2010 < 3^5 \cdot 10$).

Итого мы получаем ровно 31 число из класса 1, ровно 8 чисел из класса 2, ровно 2 числа из класса 3, ровно одно число из класса 4 и ровно 6 чисел из класса 5. Таким образом, общее количество неудачных чисел, меньших 2010, равно

$31 + 8 + 2 + 1 + 6 = 48$. Тогда количество удачных чисел равно $2009 - 48 = 1961$.

Комментарий. Получено неверное описание удачных чисел (например, получено, что удачные числа — это те, для которых каждое простое число входит в разложение на простые множители с показателем 0, 1, 2, 3 или 4) — 0 баллов.

Верное решение складывается из следующих продвижений:

а) Правильно сформулировано, но не обосновано верное описание удачных чисел — 3 балла.

б) Доказано, что любое простое число входит в разложение каждого удачного числа с показателем 0, 1, 2, 3, 4, 6 или 8 — 1 балл.

в) Доказано, что число, в разложение которого любое простое число входит с показателем 0, 1, 2, 3, 4, 6 или 8, является удачным — 1 балл.

г) Верно проведен подсчет неудачных чисел, меньших 2010 — 2 балла.

Баллы за пункты а) — г) суммируются (сумма баллов равна 7).