10 класс

10.1. Пусть R_0 — первая строка таблицы. Рассмотрим любой набор из чётного количества столбцов и пронумеруем их слева направо: $C_1, \ldots, C_{2m}$. Тогда в таблице есть строка R_1, отличающаяся от R_0 ровно в столбцах C_1 и C_2; далее, есть строка R_2, отличающаяся от R_1 ровно в столбцах C_3 и C_4; $\ldots$; наконец, есть строка R_m, отличающаяся от R_{m-1} ровно в столбцах C_{2m-1} и C_{2m} (если $m = 0$, то $R_m = R_0$). Итак, строка R_m отличается от R_0 ровно в столбцах $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$. Значит, строки R_m, построенные по различным наборам столбцов, различны. Поскольку количество наборов из чётного числа столбцов равно $2^{10}/2 = 512$, то и количество строк в таблице не меньше 512.

Замечание. В таблице может быть ровно 512 строк — например, если в её строках записаны все 512 последовательностей из 10 нулей и единиц, среди которых чётное число нулей.

10.2. **Ответ.** 4.

Обозначим $P_i(x) = x^2 + a_i x + b_i$, $P(x) = P_1(x) + \ldots + P_9(x)$. Заметим, что $P_i(x) + P_{10-i}(x) = 2x^2 + (a_i + a_{10-i})x + (b_i + b_{10-i}) = 2P_5(x)$. Значит, $P(x) = 9P_5(x)$, и условие равносильно тому, что $P_5(x)$ имеет хотя бы один корень.

Обозначим через x_0 какой-нибудь из его корней. Тогда $P_i(x_0) + P_{10-i}(x_0) = 2P_5(x_0) = 0$, то есть либо $P_i(x_0) \leqslant 0$, либо $P_{10-i}(x_0) \leqslant 0$. Поскольку старшие коэффициенты трёхчленов положительны, из этого следует, что в каждой из пар (P_1, P_9), (P_2, P_8), (P_3, P_7), (P_4, P_6) хотя бы один из трёхчленов имеет корень. Значит, есть не меньше пяти трёхчленов, имеющих хотя бы по одному корню. Поэтому есть не более четырёх трёхчленов без корней.

Осталось привести пример, когда ровно пять трёхчленов (и один из них — P_5) имеют хотя бы по одному корню. Годятся, например, трёхчлены $x^2 - 4$, $x^2 - 3$, $x^2 - 2$, $\ldots$, $x^2 + 4$.

10.3. Предположим противное. Рассмотрим граф G, в котором люди являются вершинами, а два человека соединены ребром, если они знакомы. Тогда граф k-разбиваем, если его вершины можно правильно окрасить в k цветов (т. е. окрасить так, чтобы соседние вершины имели разные цвета). Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Пусть в графе нет циклов нечётной длины. Тогда его вершины можно правильно раскрасить двумя красками.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать лемму для связного графа. *Расстоянием* между двумя вершинами X и Y назовём наименьшую длину пути, соединяющего эти вершины.

Зафиксируем некоторую вершину A, и покрасим все вершины, находящиеся на нечётном расстоянии от A, в красный цвет, а остальные вершины — в синий цвет. Докажем, что указанная раскраска — искомая. Предположим противное — имеется ребро, соединяющее, скажем, красные вершины B и C. Рассмотрим кратчайшие пути $A = B_0, B_1, \ldots, B_{2n-1} = B$ и $A = C_0$, $C_1, \ldots, C_{2m-1} = C$, ведущие из A в B и в C. Взяв наибольший индекс i такой, что $B_i = C_i$, получим цикл нечётной длины B_i, $B_{i+1}, \ldots, B_{2n-1}, C_{2m-1}, C_{2m-2}, \ldots, C_i = B_i$. Противоречие. $\square$

По лемме, в нашем графе G есть нечётный цикл — иначе его вершины можно окрасить даже в два цвета. Выберем в G нечётный цикл C минимальной длины n. Тогда не существует рёбер, соединяющих вершины этого цикла, кроме рёбер самого цикла. Действительно, любое такое ребро разбивает цикл на два меньших по длине, причём один из них нечётен. Значит, в этом случае нашёлся бы нечётный цикл меньшей длины.

Далее, покажем, что любая вершина x, не принадлежащая C, соединена не более, чем с двумя вершинами C. Если C содержит три вершины, то утверждение верно, иначе x вместе с вершинами C образует компанию из 4 попарно знакомых человек.

Пусть теперь в C больше трёх вершин. Предположим, что x соединена с вершинами v_1, v_2, v_3 этого цикла. Участок цикла между какими-то двумя из них (скажем, между v_1 и v_2) содержит нечётное количество рёбер d. Если $d < n-2$, то этот участок вместе с вершиной x образует нечётный цикл длины $d+2 < n$, что невозможно. Значит, $d \geqslant n-2$ ребра, а это значит, что вершины v_1, v_3, v_2 идут в цикле подряд. Но тогда найдётся цикл v_1, v_3, x длины 3, что невозможно.

Теперь мы можем предъявить требуемое разбиение: поместим в одну группу вершины цикла C, а в другую (назовём её D) — все остальные. Вершины цикла C, очевидно, нельзя правильно окрасить в два цвета. Осталось показать, что между вершинами группы D есть ребро (тогда она 1-неразбиваема). Предполагая противное, покажем, что G можно окрасить в три цвета. Сначала окрасим все вершины C, кроме одной, попеременно в цвета 1 и 2, а оставшуюся окрасим в цвет 3; поскольку между этими вершинами нет других рёбер, раскраска этого цикла — правильная. Окрасить теперь вершины группы D по очереди. Каждая очередная вершина соединена не более, чем с двумя вершинами из C, и не соединена с вершинами из D; значит, можно выбрать для неё цвет, отличный от цветов её соседей. Итого, граф G можно правильно окрасить в три цвета, что противоречит условию.

10.4. Поскольку отрезки BC и XY пересекаются, без ограничения общности можно считать, что $AB > AX$ и $AC < AY$.

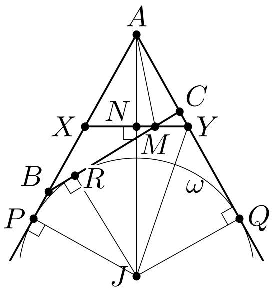

Рис. 3

Пусть вневписанная окружность ω исходного треугольника касается стороны BC в точке R, а продолжений сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Пусть J — центр ω, а r — её радиус. Пусть также N — середина XY; из симметрии N лежит на AJ, и $AN \perp XY$. Имеем $AP = AQ = \frac{1}{2}(AP + AQ) = \frac{1}{2}(AB + BP + AC + CQ) = \frac{1}{2}(AB + BR + AC + CR) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 2$. Отсюда $AY = YQ = 1$.

Теперь по теореме Пифагора получаем $MR^2 = MJ^2 - JR^2 = (MN^2 + NJ^2) - r^2 = MN^2 + (YJ^2 - YN^2) - r^2 = MN^2 + (YQ^2 + r^2) - (YA^2 - AN^2) - r^2 = MN^2 + AN^2 = AM^2$, ибо $YA = YQ$.

Отсюда $AM = MR$, и периметр треугольника ACM равен

$AC + CM + AM = AC + CM + MR = AC + CR = AC + CQ = AQ = 2$.

Замечание. Вычисления можно сократить, заметив, что прямая XY — радикальная ось окружности ω и точки A. Поскольку M лежит на этой прямой, получаем $MR = MA$.