10 класс

10.1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша — три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй. (*И. Рубанов*)

Решение. Первый мог обогнать второго только на кольцевой дорожке стадиона. Так как он вбежал на стадион первым, на своём первом круге он обогнать второго не мог. Стало быть, обгоны случились, когда первый бежал по стадиону свои второй и третий круги. Пока первый бежал эти два круга, он обогнал второго по крайней мере на круг. Следовательно, второй за это время пробежал не больше одного круга, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Комментарий. Если в решении рассмотрен лишь некоторый частный случай (например, без обоснования говорится, что достаточно рассмотреть лишь случай, когда первая встреча происходит в тот момент, когда второй бегун вбегает на стадион, или без обоснования утверждается, что «наихудший случай — если вторая встреча произошла на финише») — ставится не более 3 баллов за всю задачу.

10.2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и K так, что $\angle ABM = \angle CBK$. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников ABM, ABK, CBM и CBK, лежат на одной окружности. (*Т. Емельянова*)

Решение. Без ограничения общности можно считать, что точка M лежит между A и K. Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры описанных окружностей треугольников ABM, ABK, CBM и CBK соответственно. Прямые O_1O_3 и O_1O_2 являются серединными перпендикулярами к отрезкам BM и AB, соответственно. Значит, углы $O_2O_1O_3$ и ABM равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (см. рис. 3). Аналогично, $\angle O_2O_4O_3 = \angle CBK$, а значит, $\angle O_2O_4O_3 = \angle O_2O_1O_3$. Это и означает, что точки O_1, O_2, O_3, O_4 лежат на одной окружности.

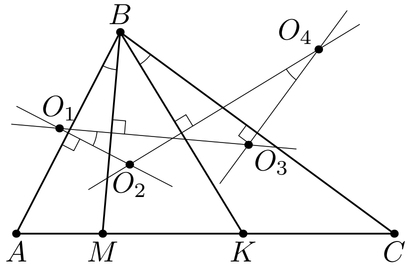

Рис. 3

Замечание. Нетрудно видеть, что точка пересечения прямых O_1O_2 и O_3O_4 — центр O описанной окружности треугольника ABC, причём точки O_2 и O_3 лежат на отрезках OO_1 и OO_4, соответственно. Это позволяет обосновать расположение точек на рисунке.

Комментарий. За отсутствие обоснования расположения точек баллы не снимаются.

10.3. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_\ell$, где $1 \leqslant k, \ell \leqslant 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, ..., 99)? (*П. Кожевников*)

Ответ. Не может.

Решение. Пусть среди наших 14 чисел есть a чётных и $b = 14 - a$ нечётных. Нечётное число на доске может появиться лишь как сумма чётного и нечётного, т.е. таких чисел будет ab (при этом каждое будет выписано по два раза). Но $ab = \dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \leqslant \dfrac{(a+b)^2}{4} = 49$. Значит, на доске будет не более 49 различных нечётных чисел; а, чтобы выполнялось условие, их должно быть хотя бы 50. Значит, требуемое невозможно.

Комментарий. Доказано только, что на доску выписаны не более 105 различных чисел — 0 баллов.

10.4. Ненулевые числа a, b, c таковы, что любые два из трёх уравнений $ax^{11} + bx^4 + c = 0$, $bx^{11} + cx^4 + a = 0$, $cx^{11} + ax^4 + b = 0$ имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень. (*И. Богданов*)

Решение. Заметим сразу, что все корни наших уравнений — ненулевые, поскольку свободные члены не равны нулю.

Пусть p — общий корень первых двух уравнений. Тогда имеем

$$0 = b(ap^{11} + bp^4 + c) - a(bp^{11} + cp^4 + a) = p^4(b^2 - ac) - (a^2 - bc),$$
$$0 = b(bp^{11} + cp^4 + a) - c(ap^{11} + bp^4 + c) = p^{11}(b^2 - ac) - (c^2 - ab).$$

Отсюда следует, что если одно из чисел $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ равно нулю, то и все три равны нулю. Но тогда $a/b = b/c = c/a$, а поскольку произведение этих чисел равно 1, то и все они равны 1, то есть $a = b = c$. В этом случае утверждение задачи очевидно.

В противном случае все три числа $|a^2 - bc|$, $|b^2 - ac|$, $|c^2 - ab|$ ненулевые. Переименовав, если надо, переменые по циклу, можно считать, что $|b^2 - ac|$ — среднее по величине из них. Тогда из полученных выше равенств следует, что одно из чисел $|p|^4 = \dfrac{|a^2 - bc|}{|b^2 - ac|}$ и $|p|^{11} = \dfrac{|c^2 - ab|}{|b^2 - ac|}$ не больше единицы, а другое — не меньше единицы. Это возможно лишь тогда, когда оба они равны единице, то есть $|p| = 1$, $|a^2 - bc| = |b^2 - ac| = |c^2 - ab|$. Обозначая через q и r общие корни в других парах, получаем теперь из аналогичных равенств $|q| = |r| = |p| = 1$, и два из чисел p, q, r равны, скажем, $p = q$. Но тогда это число является общим корнем всех трёх уравнений.

Комментарий. Получено выражение общего корня p двух уравнений (или его степени) через a, b, c — 1 балл.

Получены два *существенно* различных выражения степеней p через a, b, c (как, например, выражения $p^4 = \dfrac{a^2 - bc}{b^2 - ac}$ и $p^{11} = \dfrac{c^2 - ab}{b^2 - ac}$ в авторском решении) — 2 балла.

Если вдобавок к предыдущему продвижению разобран случай обращения в 0 одного из выражений $b^2 - ac$, $c^2 - ab$, $a^2 - bc$ — добавить ещё 1 балл.