11 класс

Задача 1. Пакет с мукой

Пусть m – масса пакета.

Его скорость непосредственно перед ударом равна $v = \sqrt{2gh}$. Удар абсолютно неупругий. Поэтому скорости пакета и чашки сразу после удара одинаковы и равны

$$V = \frac{m}{m+M}v.$$

До удара на пружине висела только чашка, поэтому удлинение пружины было равно

$$x_1 = \frac{Mg}{k}.$$

В момент максимального отклонения удлинение равно

$$x_2 = \frac{Mg}{k} + \frac{m_1 g}{k}.$$

Запишем закон сохранения энергии для момента времени сразу после удара и в момент максимального отклонения:

$$\frac{(M+m)V^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} - (M+m)g(x_2 - x_1).$$

После того как наступит равновесие, весы будут показывать массу пакета с мукой. Поэтому $m = m_0$.

$$\frac{(M+m_0)\cdot 2gh\cdot\left(\frac{m_0}{M+m_0}\right)^2}{2} + \frac{k\cdot M^2g^2}{2k^2} = \frac{k\cdot\left(\frac{Mg}{k}+\frac{m_1 g}{k}\right)^2}{2} - (M+m_0)\cdot g\cdot\frac{m_1 g}{k}.$$

После упрощения получаем

$$M = \frac{2km_0^2 h}{m_1 g(m_1 - 2m_0)} - m_0 = 2 \text{ кг}.$$

Задача 2. Магнетизм

При изменении площади контура $ABCD$, образованного стержнями и направляющими, из-за возникающей ЭДС индукции в системе течёт электрический ток (рис. 29). Силы Ампера действует таким образом, что тормозят стержень AB и разгоняют CD. При выравнивании скоростей v_{AB} и v_{CD} магнитный поток через контур $ABCD$ перестаёт изменяться, исчезает ЭДС индукции и индуктивный ток, а с ними и силы Ампера. С этого момента стержни движутся с равными и одинаковыми скоростями.

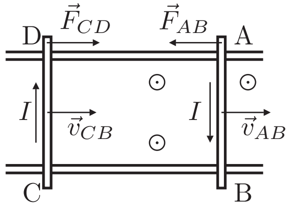

Рис. 29

За малый промежуток времени Δt изменение площади контура

$$\Delta S = (v_{AB} - v_{CD})l\Delta t,$$

изменение магнитного потока

$$\Delta\Phi = B\Delta S = B(v_{AB} - v_{CD})l\Delta t,$$

ЭДС индукции

$$|\mathscr{E}_\text{и}| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B(v_{AB} - v_{CD})l,$$

ток в контуре

$$I_{AB} = I_{CD} = \frac{|\mathscr{E}_\text{и}|}{2R} = \frac{B(v_{AB} - v_{CD})l}{2R},$$

силы Ампера

$$F_{AB} = F_{CD} = \frac{B^2l^2(v_{AB} - v_{CD})}{2R},$$

ускорения стержней направлены противоположно и равны

$$a = \frac{B^2l^2(v_{AB} - v_{CD})}{2mR}.$$

С учётом направления ускорения

$$\frac{\Delta v_{AB}}{\Delta t} = -\frac{B^2l^2(v_{AB} - v_{CD})}{2mR},$$

$$\frac{\Delta v_{CD}}{\Delta t} = \frac{B^2l^2(v_{AB} - v_{CD})}{2mR}.$$

Домножая обе части уравнений на Δt и учитывая, что $(v_{AB} - v_{CD})\Delta t = \Delta d$ - изменение расстояния между стержнями, получаем

$$\Delta v_{AB} = -\frac{B^2l^2}{2mR}\Delta d,$$

$$\Delta v_{CD} = \frac{B^2l^2}{2mR}\Delta d.$$

Тогда

$$v_{AB} = v_0 - \frac{B^2l^2}{2mR}\Delta d,$$

$$v_{CD} = \frac{B^2l^2}{2mR}\Delta d.$$

При выравнивании скоростей

$$v_0 - \frac{B^2l^2}{2mR}\Delta d = \frac{B^2l^2}{2mR}\Delta d,$$

отсюда

$$\Delta d = \frac{mv_0R}{B^2l^2}.$$

Окончательно установившееся расстояние между стержнями

$$d' = d + \Delta d = d + \frac{mv_0R}{B^2l^2}.$$

Скорости при этом

$$v_{AB} = v_{CD} = v_0/2.$$

В системе выделится теплота

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - 2\frac{m(v_0/2)^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4}.$$

Задача 3. Диполь в электрическом поле

Сила, действующая на диполь со стороны электрического поля, является суммой сил, действующих на заряды $+q$ и $-q$. Пусть координата центра диполя x, тогда

$$F_x(x) = qE(x + l/2) - qE(x - l/2) = q\frac{dE}{dx}l = -2qlE_0\frac{x}{L^2}.$$

Запишем второй закон Ньютона для диполя:

$$m\ddot{x} = F(x) = -2\frac{qlE_0}{L^2}x.$$

Полученное уравнение имеет вид уравнения гармонических колебаний с циклической частотой ω:

$$\omega = \sqrt{2\frac{qlE_0}{mL^2}}.$$

Его решение можно записать в виде:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Постоянные A и ω найдём из начальных условий:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{v_0}{\omega L} + \pi, \qquad A = L\sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{\omega L}\right)^2}.$$

Зная уравнение движения, можно найти наибольшую скорость диполя:

$$v_{max} = A\omega = \sqrt{v_0^2 + 2\frac{qlE_0}{m}}.$$

Фазу колебаний в момент, когда диполь покинет область поля, найдём из тригонометрии:

$$\varphi_1 = 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{v_0}{\omega L}.$$

Зная начальную и конечную фазу, можно найти время пролёта:

$$t = \frac{\varphi_1 - \varphi}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{v_0}{\omega L}\right).$$

Задача 4. Линейный процесс

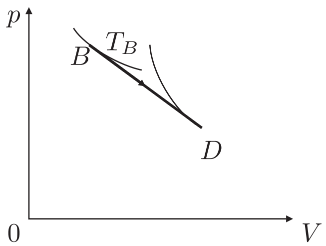

Рис. 30

Запишем уравнение линейного процесса BD в виде $p(V) = p_D + k(V - V_D)$, где p_D и V_D есть давление и объём газа в состоянии D, соответственно. Отсюда, $k = -\dfrac{p_D}{V_0 - V_D}$, где V_0 – точка пересечения прямой BD с осью объёмов. Процесс прекращается в точке D, где данной прямой касается адиабата (теплота подводится) (рис. 30). Условием касания адиабаты и прямой является совпадение коэффициентов наклона в точке D.

Уравнение адиабаты:

$$pV^\gamma = p_DV_D{}^\gamma.$$

Продифференцируем уравнение адиабаты и найдем угловой коэффициент в точке D:

$$p = \frac{p_DV_D{}^\gamma}{V^\gamma},$$

$$p'(V_D) = -\gamma\frac{p_DV_D{}^\gamma}{V_D{}^{\gamma+1}} = -\gamma\frac{p_D}{V_D}.$$

Приравнивая $p'(V_D) = k$, при $\gamma = 4/3$ (газ многоатомный), получим $V_D = 4V_0/7$.

Чтобы работа была максимальной, необходимо прямую BD проводить как можно более полого. В пределе это будет касательная к изотерме в точке B. Аналогично находим

$$V_B = \frac{V_0}{2}.$$

Далее,

$$p_D = 2p_B - \frac{p_B}{V_B}V_D = \frac{6}{7}p_B.$$

Максимальная работа равна

$$A_m = \frac{1}{2}(p_B + p_D)(V_D - V_B) = \frac{1}{2}p_BV_B\left(1 + \frac{6}{7}\right)\left(\frac{8}{7} - 1\right) = \frac{13}{98}RT_B = 540{,}15\ \text{Дж},$$

где $T_B = 490$ К.

Задача 5. Линзы в круг

1. По условию плоскости линз образуют правильный многоугольник. Из центра C проводим два луча (CD и CE), образующие с ближайшими прямыми (CA и CB) углы $\alpha = 2\pi/N$. Это и будут проекции плоскостей линз на плоскость рисунка.

2. Предположим, что фокус F принадлежит левой линзе. Проведем через него перпендикуляр к этой линзе (рис. 31). Точка пересечения перпендикуляра с плоскостью линзы даст положение её оптического центра O. Отметим на остальных плоскостях оптические центры линз.

3. Многоугольник правильный, поэтому ход луча относительно плоскости линзы симметричен. Из формулы для тонкой собирающей линзы следует, что при таком ходе луч пересекает главную оптическую ось линзы на двойном фокусном расстоянии. Если же линза рассеивающая, то точку двойного фокуса пересечёт воображаемое продолжения луча. Откладываем на главных оптических осях каждой двойные фокусные расстояния. Луч, идущий через двойные фокусы, лежащие внутри ACB, пойдёт относительно точки C дальше оптических центров линз. Это соответствует собирающей линзе. Луч, идущий через двойные фокусы, лежащие снаружи ACB, пойдёт относительно точки C ближе оптических центров линз. Это соответствует рассеивающей линзе. Пусть эти лучи пересекают плоскости линз (CA и CB) в точках A_1, B_1 и A_2, B_2. Откладывая от центра C отрезки длиной CB_1, мы восстановим точки, через которые пройдёт искомый луч, если линзы собирающие. Если откладывать от центра C отрезки длиной CB_2, мы восстановим точки, через которые пройдёт искомый луч, если линзы рассеивающие. Убеждаемся, что в обоих случаях луч проходит сквозь линзы (её радиус равен $D/2$).

4. Теперь предположим, что фокус F относится к правой линзе. Выполнив все построения аналогично ранее рассмотренному случаю, убеждаемся, что луч пройдёт мимо линз (на расстоянии большем её радиуса $D/2$).

5. Итак, возможны два варианта. Линза может быть собирающей и рассеивающей. Фокус F принадлежит левой линзе.

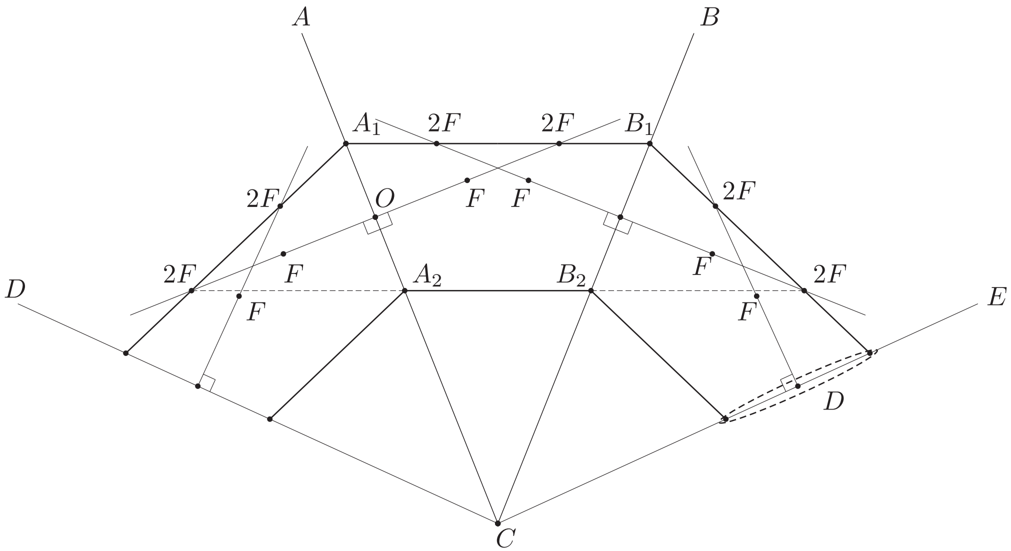

Рис. 31