<u>Решения заданий регионального этапа Всероссийской олимпиады по астрономии.</u>

<u>11 класс</u>

1. Условие.

Две черные дыры по своим размерам (горизонта событий) совпадают с Землей и Луной и обращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам в 384 400 км друг от друга. Чему равен орбитальный период такой системы?

1. Решение. Границей черной дыры (горизонтом событий) считается сфера, на поверхности которой скорость убегания (вторая космическая скорость) становится равной скорости света. Радиус этой сферы называется гравитационным радиусом и определяется формулой

$$r_{\mathrm{G}} = \frac{2GM}{c^2}.$$

где M – масса черной дыры, а c – скорость света. Определим суммарную массу системы:

$$M = \frac{c^2}{2G}(r_1 + r_2) = 5.5 \cdot 10^{33} \text{ кг.}$$

Здесь r_1 и r_2 – радиусы Земли и Луны, совпадающие с гравитационными радиусами черных дыр. Полученная масса в $9{\cdot}10^8$ раз больше суммарной массы Земли и Луны m. Расстояние между черными дырами невелико, но оно существенно больше гравитационных радиусов, и мы можем пользоваться формулами классической физики. Так как это расстояние – такое же, как между Землей и Луной, орбитальный период можно определить из простой формулы:

$$T = T_0 \sqrt{\frac{m}{M}} = 80 \text{ с.}$$

Здесь T_0 – орбитальный период системы Земля-Луна.

1. Рекомендации для жюри. Указанную задачу можно решать приведенным выше способом, можно вести вычисление по общему виду III закона Кеплера. При проверке необходимо обратить внимание на правильное соотношение массы и гравитационного радиуса черной дыры

(3 балла) и правильное использование III закона Кеплера (3 балла). Формулировка окончательного ответа оценивается в 2 балла.

2. Условие.

Приемник, установленный в фокальной плоскости телескопа, регистрирует оптическое излучение, приходящее из круглой области неба диаметром 5″. Какие три небесных объекта (не считая Солнца и объектов на Земле и околоземной орбите) окажутся самыми яркими для этого приемника (в порядке убывания яркости)? Нестационарные объекты (яркие кометы, новые и сверхновые звезды) не учитывать.

2. Решение. Угловой размер области неба, фиксируемой прибором, существенно больше видимых размеров далеких звезд, даже с учетом атмосферных искажений. Поэтому их измеренный блеск будет соответствовать полной видимой яркости этих звезд. А вот свет протяженных небесных объектов, в том числе самых ярких из них – Луны и планет – будет фиксироваться частично. Измеренная яркость будет пропорциональна поверхностной яркости планет, которая определяется их альбедо и, прежде всего, расстоянием до Солнца. Эта яркость достаточно быстро убывает от внутренних планет к внешним и максимальна, когда фаза планеты (Луны) равна 1.

Пусть некоторая планета имеет угловой диаметр d и блеск m. Если телескоп точно наведен на центр диска планеты, а угловой диаметр не меньше 5″, то звездная величина, которую зафиксирует прибор, составит

$$m_{\mathrm{D}} = m + 5 \lg (\mathrm{d}''/5'').$$

Возьмем для простоты вычислений случай верхнего соединения для Меркурия и Венеры, полнолуния для Луны и противостояния для Марса и Юпитера. Результаты занесем в таблицу:

Объект	m	d″	m_{D}
Меркурий	–1.8	5	–1.8
Венера	–3.9	10	–2.4
Луна	–12.7	1860	+0.1
Марс	–2.0	18	+0.8
Юпитер	–2.7	47	+2.2

Для более далеких планет измеренный блеск будет существенно слабее. Мы видим, что яркость действительно убывает по мере удаления объектов от Солнца, лишь Венера, за счет высокой отражательной способности, будет выглядеть несколько ярче Меркурия. Она и станет самым ярким объектом (не считая Солнца) для данного прибора. Второе место займет Меркурий, а третье – ярчайшая звезда ночного неба Сириус (блеск около -1.6^m).

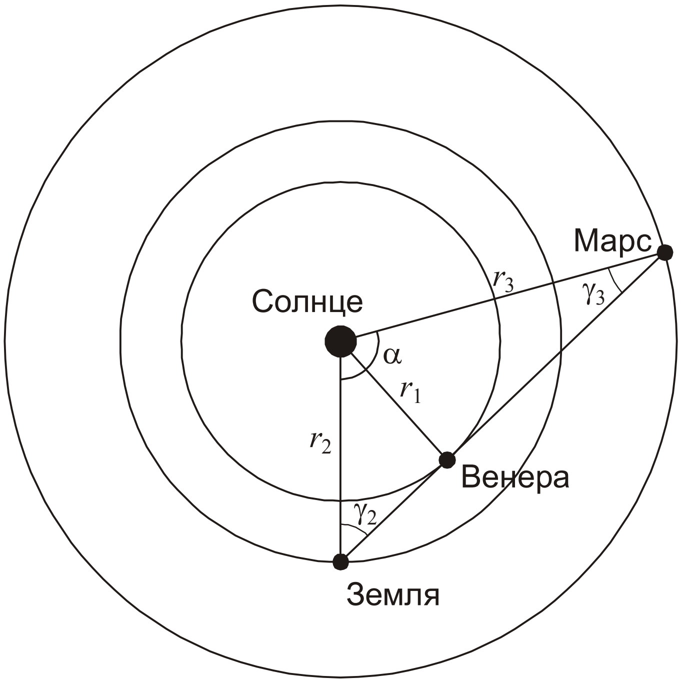
2. Рекомендации для жюри. Решение задачи может проводиться разными методами. Вместо количественного подхода могут быть представлены рассуждения, что измеренный прибором блеск будет пропорционален поверхностной яркости, которая для объектов Солнечной системы строго убывает с удалением от Солнца, вне зависимости от их размеров. Такие рассуждения тоже считаются правильными. Обоснование или подход к вычислению яркости оценивается в 3 балла.

Указание Венеры, Меркурия и Сириуса в качестве трех ярчайших объектов для указанного прибора оцениваются по 1 баллу за каждое. Правильная расстановка этих объектов по яркости оценивается еще в 2 балла. Если самым ярким объектом указан Меркурий, а Венера идет на втором месте, оценка снижается не более чем на 1 балл.

3. Условие.

Близкое соединение Венеры и Марса наблюдается в некоторой точке Земли утром 1 января на восходе Солнца на высоте 46° над горизонтом. В какую дату произойдет ближайшее противостояние Марса? Орбиты всех планет считать круговыми и лежащими в плоскости эклиптики.

3. Решение. В момент, описанный в условии задачи, Венера находится на высоте 46° над горизонтом. Солнце в этот же момент только восходит, поэтому угловое расстояние между Солнцем и Венерой не меньше 46°. Но оно не может быть и больше, так как в случае круговых орбит именно такое угловое расстояние (обозначим его γ_2) соответствует наибольшей элонгации планеты. Значит, Венера находилась точно над восходящим Солнцем, дело происходило в тропическом поясе Земли утром, а сама элонгация Венеры – западная.



Из рисунка видно, что в указанный момент Венера оказалась в наибольшей элонгации (только восточной) и при наблюдении с Марса. Угловое расстояние Венеры от Солнца там составило

$$\gamma_3 = arcsin\frac{r_1}{r_3} = 28^{\circ}.$$

Из треугольника «Солнце – Земля – Марс» определим разность гелиоцентрических долгот Марса и Земли в этот момент:

$$\alpha = 180° - \gamma_2 - \gamma_3 = 106°.$$

Марс вместе с Венерой виден с Земли по утрам, Земля догоняет его в ходе своего орбитального движения. Время, оставшееся до противостояния Марса, равно

$$T = S\frac{\alpha}{360^{\circ}} = 229 \text{ сут}.$$

Здесь S – синодический период Марса. Противостояние Марса наступит около 17 августа (16 августа для високосного года) начинающегося года.

3. Рекомендации для жюри. На первом этапе решения задачи участники олимпиады должны обосновать, что Венера находится в наибольшей западной элонгации, в 46° от Солнца. Этот этап решения оценивается в 3 балла. Если данный вывод сделан без обоснования, то эти 3 балла не выставляются, но дальнейшее решение оценивается в полной мере.

Следующие 3 балла выставляются за вычисление разности долгот Марса и Земли. Это может быть сделано методом, описанным выше, а также с помощью теорем синусов или косинусов. Вычисление даты ближайшего противостояния Марса оцениваются в 2 балла, причем она может отличаться на 1-2 дня, что не должно считаться ошибкой.

4. Условие.

Для своих наблюдений Христиан Гюйгенс использовал телескоп-рефрактор с диаметром объектива 22 см и фокусным расстоянием 64 м. Объектив этого телескопа был подвешен на столбе, а наблюдатель с окуляром располагался на земле. Предположим, находясь на широте +52°, Гюйгенс проводил наблюдения светила со склонением +27° в верхней кульминации. Какое расстояние необходимо ему пройти за 15 минут наблюдения, чтобы всё время наблюдать светило в центре поля зрения? Считать, что Гюйгенс использовал окуляр с равнозрачковым увеличением.

4. Решение. Угловая скорость светила на небесном экваторе равна

$$\omega_0 = 2\pi/T.$$

Здесь T – продолжительность звездных суток. Длина суточной параллели со склонением δ меньше, соответствующая угловая скорость составит

$$\omega = \omega_0 \cos\delta = 2\pi \cos\delta / T.$$

Это составляет 13.4″ в секунду. За время t (15 минут) светило прочертит на небе дугу длиной

$$\gamma = \omega\, t = 2\pi \cos\delta\; t/T = 3.35°.$$

На такой же угол требуется повернуть телескоп. Наблюдатель находится от объектива на расстоянии равном сумме фокусных расстояний объектива F и окуляра f. Как известно, диаметр выходного зрачка d равен отношению диаметра объектива D к увеличению телескопа. Увеличение же равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра. Отсюда получаем фокусное расстояние окуляра:

$$f = F\, d / D.$$

Длина всего телескопа будет равна

$$L = F + f = F\,(1 + d/D).$$

Считая диаметр зрачка наблюдателя равным 6 мм, получаем расстояние от наблюдателя до объектива: 65.7 м. Светило находится вблизи кульминации, движется параллельно горизонту. Поэтому наблюдатель должен также двигаться горизонтально, проходя за время t расстояние

$$l = L \sin\gamma \sim L\,\gamma\text{ (рад)} = 3.8\text{ м}.$$

4. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участнику олимпиады необходимо определить угол поворота телескопа за время наблюдения. Успешное выполнение этой части оценивается в 5 баллов. Однако, если для определения этого угла использовалась скорость светила на экваторе, а не на суточной параллели, то оценка снижается на 2 балла и данный этап оценивается в 3 балла. Успешное определение расстояния от объектива до наблюдателя оценивается еще в 1 балл. Наконец, определение пройденного расстояния в 2 балла.

5. Условие.
Вокруг далекой звезды по круговым орбитам обращаются две планеты. У одной из них орбитальный период вдвое больше, а сферическое альбедо – вдвое меньше, чем у другой планеты. При этом средняя температура поверхностей обеих планет одинакова. Найдите сферическое альбедо обеих планет. Тепловые эффекты от недр и атмосфер планет не учитывать.

5. Решение. Обозначим через $a_{1,2}$ и $T_{1,2}$ радиусы орбит и периоды обращения двух планет. В соответствии с III законом Кеплера

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{2/3} = 2^{2/3}.$$

Если пренебречь тепловыми эффектами от недр и атмосфер планет, то равенство средних температур обеих планет означает равенство притока энергии от центральной звезды на эти планеты. Запишем данное соотношение:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{1 - A_1}{a_1^2} \cdot \frac{a_2^2}{1 - A_2} = 1.$$

Здесь учтено, что часть энергии, идущей от звезды, определяемая величиной альбедо $A_{1,2}$, отражается от планеты и не идет на ее нагрев. Учитывая, что $2A_1=A_2$, получаем:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = 2^{4/3} = \frac{1-A_1}{1-2A_1}.$$

В итоге,

$$A_1 = \frac{2^{4/3}-1}{2^{7/3}-1} = 0.375; \quad A_2 = \frac{2^{7/3}-2}{2^{7/3}-1} = 0.75.$$

5. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники олимпиады должны получить (в численном или общем виде) соотношение радиусов орбит двух планет, это оценивается в 2 балла. Условие равенства температур на планетах (в общем или численном виде) оценивается в 3 балла. Решение уравнения и формулировка ответа оценивается еще в 3 балла.

6. Условие.

Некоторая эллиптическая галактика имеет блеск 18^m и красное смещение 0.1. Оцените массу галактики. Межзвездным поглощением пренебречь.

6. Решение. Найдем расстояние до галактики по закону Хаббла:

$$L = \frac{c\,z}{H} = 420 \text{ Мпк.}$$

Здесь H – постоянная Хаббла, c – скорость света. Величина красного смещения z существенно меньше единицы, и мы можем вычислить абсолютную звездную величину этой галактики по обычной формуле:

$$m_0 = m + 5 - 5\lg L = -20.$$

Светимость этой галактики в 10^{10} раз больше светимости Солнца. Как известно, в эллиптических галактиках практически отсутствуют газ и пыль. Поэтому мы можем считать, что до нас доходит излучение всех звезд этой галактики. Считая среднюю массу звезды равной массе Солнца, а среднюю светимость – светимости Солнца, получаем, что масса всех звезд галактики равна 10^{10} масс Солнца. Но мы должны также учесть, что за счет темной материи масса галактик примерно в 5 раз превосходит массу их видимого вещества (в данном случае –

звезд). Поэтому итоговой оценкой массы будет $5 \cdot 10^{10}$ (50 миллиардов) масс Солнца или 10^{41} кг.

6. Рекомендации для жюри. Решение задачи четко разбивается на несколько этапов. Вычисление расстояния до галактики по закону Хаббла оценивается в 2 балла, вычисление светимости – еще в 2 балла. Оценка звездной массы галактики также оценивается в 2 балла, и еще 2 балла выставляются за учет темной материи и вычисление полной массы галактики.