Возможные решения

9 класс

Задача 1. Разгон поезда

Первый способ (аналитический «со временем»). Пусть L — расстояние между соседними опорами, a — ускорение электрички. Исходя из условия задачи мы будем рассматривать два соседних участка 1–2 и 2–3 между соотвествующими опорами 1, 2 и 3 (рис. 11). Условимся, что средняя скорость на участке 1–2 есть v_1, а на участке 2–3, соответственно, v_2. Пусть u_1 — мгновенная скорость в момент прохождения первой опоры, электричка проходит участок 1–2 за некоторое время t_1, а участок 2–3 — за время t_2.

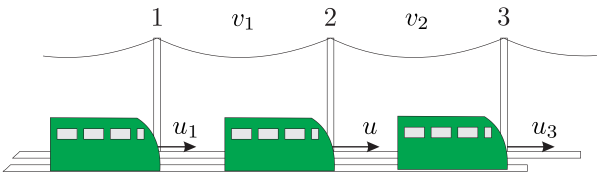

Рис. 11

Тогда из определения средней скорости на участке, его длину можно записать как

$$L = v_1 t_1 = v_2 t_2. \tag{1}$$

С другой стороны, поскольку движение равноускоренное:

$$L = u_1 t_1 + \frac{a t_1^2}{2}, \tag{2}$$

$$L = u t_2 + \frac{a t_2^2}{2}, \tag{3}$$

$$u = u_1 + a t_1. \tag{4}$$

Умножая почленно (2) на v_1/t_1 и (3) на v_2/t_2, затем, подставляя t_1 и t_2 из (1) и u_1 из (4) в (2) и (3), получаем

$$v_1^2 = u v_1 - \frac{aL}{2}, \qquad v_2^2 = u v_2 + \frac{aL}{2}.$$

Избавляясь от L, выражаем скорость u и находим её численное значение:

$$u = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 + v_2} = 26\ \text{км/ч}. \tag{5}$$

Второй способ (графический). Используем обозначения первого способа, а также равенство (1).

Построим график зависимости скорости электрички от времени. С учетом равенства (1) и численных значений скоростей, движение на участке 1–2 длится в полтора раза дольше, чем на 2–3 (например 6τ и 4τ).

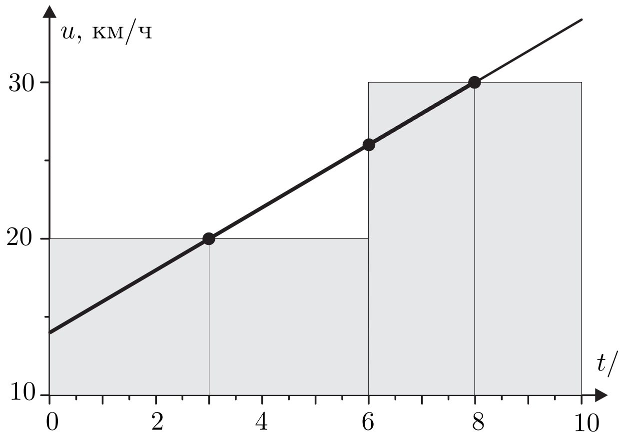

Рис. 12

Для любого участка при равноускоренном движении средняя скорость равна мгновенной скорости на середине временного интервала. Из графика следует, что изменение мгновенной скорости от 20 до 30 км/ч происходило за время 5τ. Откуда изменение скорости за 3τ равно 6 км/ч. Тогда искомая скорость 26 км/ч.

Третий способ (аналитический «без времени»). Используем обозначения первого способа. Пусть скорость на конце участка 2-3 равна u_3. Средняя скорость при равноускоренном движении:

$$v_1 = \frac{u_1 + u}{2}, \tag{6}$$

$$v_2 = \frac{u + u_3}{2}. \tag{7}$$

Перемещения на участках равны:

$$L = \frac{u^2 - u_1^2}{2a}, \tag{8}$$

$$L = \frac{u_3^2 - u^2}{2a}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$u^2 - u_1^2 = u_3^2 - u^2. \tag{10}$$

Решая систему (6), (7) и (10) относительно u получаем:

$$u = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 + v_2} = 26 \text{ км/ч}. \tag{11}$$

Задача 2. Нажали и отпустили

Пусть s — расстояние, на которое переместился брусок за время действия силы F, а x — наибольшее сжатие пружины. Чтобы брусок остановился в исходной точке, работа сил трения при этом перемещении должна быть равна работе силы F на перемещениии s:

$$Fs = 2fx. \tag{12}$$

Из того, что в момент наибольшего сжатия пружины скорость бруска равна 0, следует:

$$Fs = fx + \frac{kx^2}{2}, \tag{13}$$

где k — жёсткость пружины. Из уравнения (13) с учётом (12) находим

$$kx = 2f. \tag{14}$$

Из (12) и (14) получим

$$ks = \frac{4f^2}{F} \qquad (15).$$

Сила давления тележки на стенку будет максимальна при максимальной деформации пружины (сила упругости максимальна, а сила трения ещё не изменила направления). Значит, значения силы давления на стенку в момент прекращения действия силы F и в момент, когда она максимальна, равны, соответственно,

$$N = ks + f = \frac{4f^2}{F} + f, \tag{16}$$

$$N_{\max} = kx + f = 3f. \tag{17}$$

Задача 3. Жара в холодильнике

Пусть P — мощность поступающей за счёт теплообмена из окружающей среды теплоты, $P = \alpha(t - t_0)$, P_0 — мощность отводимой за счёт работы холодильника теплоты, C — теплоёмкость холодильника с содержимым.

1. Для нагрева холодильника на Δt требуется время T (время бездействия):

$$T = \frac{C\Delta t}{P} = \frac{C\Delta t}{\alpha(t_0 - t)}. \tag{18}$$

Далее включается двигатель и температура в холодильнике понижается на Δt за время τ (время работы):

$$\tau = \frac{C\Delta t}{P_0 - P} = \frac{C\Delta t}{P_0 - \alpha(t_0 - t)}. \tag{19}$$

Пусть изначально температура в холодильнике была равна $t = t_1$, при этом $\tau = 2T$, откуда, с учётом (18) и (19) получим:

$$t_1 = t_0 - \frac{2P_0}{3\alpha}.$$

Во втором случае $2\tau = T$ при $t = t_2$, откуда с учётом (18) и (19) получим:

$$t_2 = t_0 - \frac{P_0}{3\alpha}.$$

Тогда $\theta = t_2 – t_1 = P_0/(3\alpha)$, откуда

$$t_1 = t_0 – 2\theta = 12°\text{C}, \quad t_2 = t_0 – \theta = 21°\text{C}.$$

2. Двигатель холодильника будет работать непрерывно, если мощность отводимой им теплоты будет меньше или равна мощности теплоты, подводящейся из окружающей среды:

$$P_0 \leqslant \alpha(t_0 - t), \quad \text{откуда} \quad t \leqslant t_0 - \frac{P_0}{\alpha},$$

значит,

$$t_m = t_0 - \frac{P_0}{\alpha} = t_0 - 3\theta = 3 \text{ °C}.$$

3. В решении первого пункта задачи было показано, что время между двумя последовательными включениями холодильника равно

$$T + \tau = \frac{C\Delta t}{P} + \frac{C\Delta t}{\alpha(t_0 - t)} = \frac{C\Delta t P_0}{\alpha(t_0 - t)(P_0 - \alpha(t_0 - t))}.$$

Частота включения холодильника максимальна, когда максимальна величина $y = \alpha(t_0 - t)(P_0 - \alpha(t_0 - t))$. Для удобства обозначим $(t_0 - t)$ за x. График $y(x) = \alpha P_0 x - \alpha^2 x^2$ — парабола, ветви которой направлены вниз, поэтому y максимально для вершины параболы. Координата вершины параболы $x_\text{в} = P_0/(2\alpha)$, значит,

$$t_3 = t_0 - \frac{P_0}{2\alpha} = t_0 - \frac{3}{2}\theta = 16{,}5 \text{ °C}.$$

Задача 4. Неидеальные диоды

Рассмотрим случай, когда «+» источника подключается к точке А. Напряжение U_AB в этом случае будем считать положительным. Если напряжение на диоде меньше величины U_0, ток через него не идет (диод закрыт). При малых значениях U_{AB} все три диода закрыты, а ток, протекающий через резисторы, равен

$$I_A = \frac{U_{\text{AB}}}{3R}. \tag{1}$$

и течет от D к C. При постоении графика $I_{\text{A}}(U_{\text{AB}})$ это направление тока будем считать положительным. Зависимость (1) имеет место, пока напряжение на диоде D_1 не достигнет U_0, т.е. при

$$U_{DB} = I_A \cdot 2R < U_0,$$

или $U_{\text{AB}} < \frac{3}{2}U_0$. Итак, $I_A = \frac{U_{\text{AB}}}{3R}$ при $U_{\text{AB}} < \frac{3}{2}U_0$.

При $U_{AB} = 3U_0/2$ диод D_1 открывается, и, как следует из вольтамперной характеристики диода, напряжение на участке DB будет равно U_0 при любых значениях напряжения $U_{AB} > 3U_0/2$. Поэтому, пока не откроются диоды D_2 и D_3, ток через амперметр положителен и равен

$$I = \frac{U_0}{2R}$$

Диоды D_2 и D_3 открываются, когда напряжение на участке AC станет равным $2U_0$. А поскольку напряжение на участке CB при открытом диоде D_1 равно $U_0/2$, то открывание диодов D_2 и D_3 произойдёт при напряжении $U_{AB} = 2U_0 + U_0/2 = 5U_0/2$. При этом разность потенциалов на участке AC равна $2U_0$, а на участке DB U_0. Следовательно, напряжение U_{DC} при открытых диодах равно

$$U_{DC} = \varphi_D - \varphi_C = \varphi_B + U_0 - (\varphi_A - 2U_0) = \varphi_B - \varphi_A + 3U_0 = 3U_0 - U_{AB},$$

где φ_A, φ_B, φ_C и φ_D – потенциалы точек A, B, C и D соответственно. Поэтому ток через амперметр при открытых диодах равен

$$I_A = \frac{3U_0}{R} - \frac{U_{AB}}{R}. \tag{2}$$

Ток (2) при напряжении $U_{AB} = 5U_0/2$ совпадает с током до открывания диодов D_2 и D_3. Это значит, что зависимость тока через амперметр от U_{AB} при $U_{AB} > 5U_0/2$ — линейная убывающая функция, не имеющая разрыва в точке $U_{AB} = 5U_0/2$, с угловым коэффициентом наклона по модулю втрое большим, чем на участке $U < 3U_0/2$.

В случае, когда «+» источника подключен к B т.е. $U_{\text{AB}} < 0$, все диоды закрыты, и ток течет через три последовательно соединенных резистора. Его величина $I_A = \frac{U_{\text{AB}}}{3R}$, при этом $I_A < 0$. График зависимости I_A от U_{AB} приведен на рисунке 13:

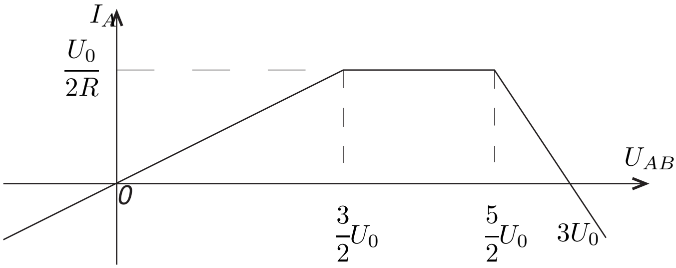

Рис. 13

Ответ:

$$I_A = \frac{U_{\text{AB}}}{3R} \quad \text{при } U_{\text{AB}} < \frac{3}{2}U_0,$$
$$I_A = \frac{U_0}{2R} \quad \text{при } \frac{3}{2}U_0 < U_{\text{AB}} < \frac{5}{2}U_0,$$
$$I_A = \frac{3U_0 - U_{\text{AB}}}{R} \quad \text{при } U_{\text{AB}} > \frac{5}{2}U_0.$$

Задача 5. Чунга-Чанга

Чебурашка и Гена видят, как Солнце перемещается с востока на запад с угловой скоростью

$$\omega = \frac{360^\circ}{24\ \text{ч}} = 15^\circ/\text{ч}.$$

Как следует из рисунка 14, Солнце видно из окон крокодила Гены от полудня, когда Солнце в зените, до времени, когда оно скроется за корпусом Чебурашки. При этом оно сместится на угол

$$\alpha = \omega T_1 = 30^\circ.$$

По аналогии найдём, что за время, пока Солнце светило в окно Чебурашки, оно сместилось на угол

$$\beta = \omega T_2 = 60^\circ.$$

Пусть высота одного этажа равна h, номер этажа на котором живёт Чебурашка n, а расстояние между корпусами вдоль экватора, соответственно, L. Тогда, исходя из рисунка 14, мы можем записать два уравнения:

$$\frac{L}{(100-10)h} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\frac{L}{(100-n)h} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Из них находим номер этажа, на котором жил Чебурашка:

$$n = 100 - 90\frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ} = 70.$$

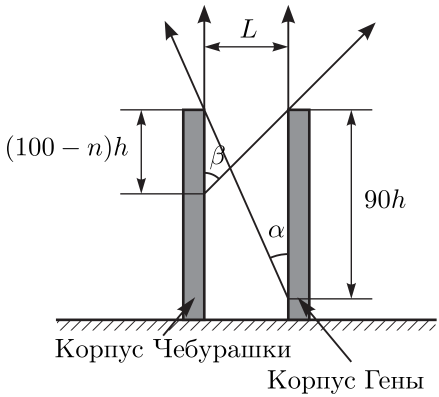

Рис. 14

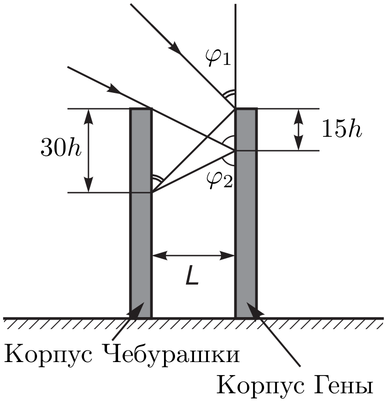

Рис. 15

Заметим, что в полдень (в 12 часов) Солнце находится строго в зените. Через некоторое время t_1 окна в корпусе Гены стали казаться Чебурашке золотыми. Это произошло тогда, когда прямые солнечные лучи, отраженные от окон верхнего этажа корпуса Гены, попали в окно Чебурашки (рис. 15). За время t_1 Солнце опустилось угол φ_1 такой, что

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{L}{30h} = \sqrt{3}, \quad \text{откуда} \quad \varphi_1 = 60^\circ.$$

Значит, $t_1 = \varphi_1/\omega = 4$ ч, и часы Чебурашки показывали 16 часов в момент, когда окна корпуса Гены стали казаться золотыми.

Пусть через время t_2 после полудня окна перестали казаться золотыми. В этот момент луч от Солнца, отражающийся от корпуса Гены и попадающий в окно Чебурашки, проходит через край корпуса Чебурашки. Найдём угол φ_2, который в этот момент будет составлять Солнце с вертикалью:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{L}{15h} = 2\sqrt{3}, \quad \text{откуда} \quad \varphi_2 \approx 73{,}9^\circ.$$

Значит, $t_2 = \varphi_2/\omega \approx 4{,}93$ ч. Окна в корпусе Гены казались Чебурашке золотыми в течение 56 минут.