11 класс

11.1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей? (*А. Грибалко*)

Ответ. Нет, не сможет.

Решение. См. решение задачи 10.1.

11.2. В пространстве даны три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке P. Обозначим через O_{ijk} центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P. Докажите, что прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ пересекаются в одной точке. (*П. Кожевников*)

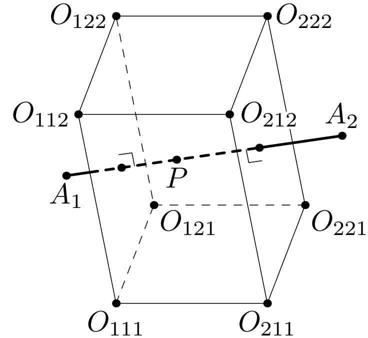

Рис. 6

Решение. Для любого отрезка XY *серединным перпендикуляром* к этому отрезку назовём плоскость, перпендикулярную ему и проходящую через его середину, т. е. геометрическое место точек, равноудалённых от X и Y.

Все точки вида O_{1jk} лежат в серединном перпендикуляре α_1 к отрезку PA_1. Аналогично, все точки O_{2jk} лежат серединном перпендикуляре α_2 к отрезку PA_2; заметим, что $\alpha_1 \parallel \alpha_2$.

Аналогично введём плоскости β_j — серединные перпендикуляры к отрезкам PB_j, и плоскости γ_k — серединные перпендикуляры к отрезкам PC_k. Тогда точки O_{ijk} — вершины параллелепипеда, образованного плоскостями α_i, β_j и γ_k. Теперь утверждение задачи следует из того, что диагонали этого параллелепипеда пересекаются в одной точке — его центре симметрии.

11.3. На клетчатый лист бумаги размера 100×100 положили несколько попарно неперекрывающихся картонных равнобедренных прямоугольных треугольничков с катетом 1; каждый треугольничек занимает ровно половину одной из клеток. Оказалось, что каждый единичный отрезок сетки (включая граничные) накрыт ровно одним катетом треугольничка. Найдите наибольшее возможное число клеток, не содержащих ни одного треугольничка.

(*Д. Храмцов*)

Ответ. $49 \cdot 50 = 2450$ клеток.

Решение. Положим $n = 50$. Назовём треугольничек *верхним*, если он расположен сверху от прямой, содержащей его горизонтальный катет, и *нижним* иначе. Пронумеруем горизонтальные *линии* сетки снизу вверх числами от 0 до $2n$.

Обозначим через u_k (соответственно d_k) число отрезочков k-й линии, участвующих в верхних (соответственно нижних) треугольничках; тогда $u_k + d_k = 2n$ и $u_0 = d_{2n} = 2n$. Кроме того, вертикальные отрезки сетки, расположенные между k-й и $(k+1)$-й линиями, участвуют ровно в $u_k + d_{k+1}$ треугольничках, так что $u_k + d_{k+1} = 2n + 1$. Отсюда несложно получить, что $d_k = k$ и $u_k = 2n - k$ при всех k.

Рассмотрим теперь клетки, расположенные между k-й и $(k+1)$-й линиями сетки. Хотя бы $u_k = 2n - k$ из этих клеток содержат по верхнему треугольнику, и хотя бы $d_{k+1} = k + 1$ из них содержат по нижнему. Значит, свободных клеток в этом ряду не больше, чем $2n - \max(u_k, d_{k+1})$, то есть не больше k при $k < n$ и не больше $(2n-1) - k$ при $k \geqslant n$. Итого, общее число свободных клеток не больше, чем $2(0+1+\ldots+(n-1)) = n(n-1)$.

Осталось привести пример, на котором эта оценка достигается. На рис. 7 показан пример при $n = 4$. Пример при $n = 50$ строится аналогично: выделяется «прямоугольник» из клеток со сторонами из $n+1$ и n клеток, параллельными диагоналям доски, его клетки красятся в шахматном порядке (так, что угловые клетки прямоугольника — чёрные), и во все чёрные клетки кладётся по два треугольничка (при этом $n(n-1)$ белых клеток остаются свободными); в оставшихся же четырёх «углах» доски треугольнички кладутся так, что прямой угол треугольника «направлен» в ту же сторону, что и весь «угол».

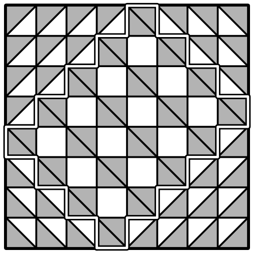
Рис. 7

11.4. В координатном пространстве провели все плоскости с уравнениями $x \pm y \pm \pm z = n$ (при всех целых n). Они разбили пространство на тетраэдры и октаэдры. Пусть точка (x_0, y_0, z_0) с рациональными координатами не лежит ни в одной проведённой плоскости. Докажите, что найдётся натуральное k, при котором точка (kx_0, ky_0, kz_0) лежит строго внутри некоторого октаэдра разбиения. (*А. Глазырин*)

Решение. Лемма. *Пусть рациональные числа a, b, c и $a+b+c$ — нецелые. Тогда существует такое натуральное k, что числа ka, kb и kc нецелые, причём* $1 < \{ka\} + \{kb\} + \{kc\} < 2$.

Доказательство. Заменяя числа a, b и c на их дробные части, можно считать, что они лежат в интервале $(0, 1)$. Обозначим $f(t) = \{ta\}+\{tb\}+\{tc\}$. Заметим, что при $1 < a+b+c < 2$ можно положить $k = 1$.

Пусть $a+b+c < 1$. Выберем такое натуральное m, что ma, mb и mc — целые. Тогда $f(m-1) = f(-1) = 3-(a+b+c) > 2$. Значит, существует наименьшее натуральное k, при котором $f(k) > 1$ (тогда $f(k-1) \leqslant 1$). Покажем, что это k удовлетворяет всем требованиям.

Из неравенства $\{ka\} \leqslant \{(k-1)a\} + a$ и аналогичных, получаем

$$f(k) \leqslant f(k-1) + (a+b+c) < f(k-1) + 1 < 2. \qquad (*)$$

Значит, осталось показать, что числа ka, kb и kc нецелые. Предположим, что, скажем, ka — целое. Тогда $\{ka\} = \{(k-1)a\}+a-1$, поэтому оценку $(*)$ можно усилить как $f(k) \leqslant f(k-1) + (a+b+c) - 1 < f(k-1) \leqslant 1$; но это противоречит выбору k. Итак, в случае $a+b+c < 1$ требуемое k найдено.

Наконец, если $a+b+c > 2$, достаточно применить уже доказанное утверждение к числам $a' = 1 - a$, $b' = 1 - b$ и $c' = 1 - c$. Ясно, что число k, подходящее для этих чисел, подойдёт и для исходных. $\square$

Перейдём к решению задачи. Вдобавок к данному координатному пространству $Oxyz$ введём *новое пространство* $Oabc$. Точке (x, y, z) из старого пространства сопоставим точку (a, b, c) из нового с координатами $a = y + z - x$, $b = x - y + z$, $c = x + y - z$; тогда $x = \dfrac{b+c}{2}$, $y = \dfrac{a+c}{2}$, $z = \dfrac{a+b}{2}$. Заметим, что $x + y + z = a + b + c$. Тогда разбиение старого пространства соответствует разбиению нового плоскостями вида $a = n$, $b = n$, $c = n$ и $a+b+c = n$. Положим $a_0 = y_0 + z_0 - x_0$, $b_0 = x_0 - y_0 + z_0$, $c_0 = x_0 + y_0 - z_0$; по условию, числа a_0, b_0, c_0 и $a_0 + b_0 + c_0$ — нецелые.

Рассмотрим некоторую точку (u, v, w) *нового* пространства с нецелыми координатами. Она попадает в некоторый куб вида $A \leqslant a \leqslant A + 1$, $B \leqslant b \leqslant B + 1$, $C \leqslant c \leqslant C + 1$. Этот куб пересекают две «наклонных» плоскости $a + b + c = A + B + C + 1$ и $a + b + c = A + B + C + 2$, которые разбивают его на два тетраэдра и (неправильный) октаэдр. При этом точка (u, v, w) попадёт внутрь октаэдра, если она окажется в полосе между указанными плоскостями, т. е. если $1 < \{u\} + \{v\} + \{w\} < 2$. Значит, применив лемму к числам a_0, b_0, c_0, мы найдём значение k, удовлетворяющее требованиям задачи.