11 класс

11.5. Пусть n — натуральное число. На $2n+1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \ldots + *x + *$ так, чтобы полученный многочлен не имел *целых* корней. Обязательно ли это можно сделать?

(*И. Богданов*)

Ответ. Да, обязательно.

Решение. Пусть p_0, p_1, $\ldots$, p_{2n} — числа на карточках, причём p_{2n} — наибольшее по модулю из них. Поставим p_i коэффициентом при x^i. Тогда, если a — целое число, по модулю не меньшее двойки, то

$$|p_{2n}a^{2n}| > |p_{2n}|(|a^{2n-1}| + |a^{2n-2}| + \ldots + 1) \geqslant$$
$$\geqslant |p_{2n-1}a^{2n-1}| + |p_{2n-2}a^{2n-2}| + \ldots + |p_0| \geqslant$$
$$\geqslant |p_{2n-1}a^{2n-1} + p_{2n-2}a^{2n-2} + \ldots + p_0|,$$

так что a — не корень полученного многочлена.

Осталось переставить коэффициенты p_{2n-1}, p_{2n-2}, $\ldots$, p_0 так, чтобы числа 0 и ± 1 также не были корнями. Числа 0 и 1 в любом случае корнями не являются, поскольку $p_0 \neq 0 \neq p_{2n} + p_{2n-1} + \ldots + p_0$ по условию. Предположим, что $x_0 = -1$ является корнем многочлена при любой перестановке коэффициентов p_{2n-1}, p_{2n-2}, $\ldots$, p_0. Тогда, если поменять местами p_i и p_{i-1} (при $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$), значение многочлена в x_0 не изменится, что возможно лишь при $p_i = p_{i-1}$. Но тогда наш многочлен имеет вид $p_{2n}x^{2n} + p_0(x^{2n-1} + x^{2n-2} + \ldots + 1)$, и его значение в точке $x_0 = -1$ равно $p_{2n} \neq 0$. Противоречие.

11.6. В стране есть $n > 1$ городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом между любыми двумя городами существует единственный авиамаршрут (возможно, с пересадками). Мэр каждого города X подсчитал количество таких нумераций всех городов числами от 1 до n, что на любом авиамаршруте, начинающемся в X, номера городов идут в порядке возрастания. Все мэры, кроме одного, заметили, что их результаты подсчётов делятся на 2016. Докажите, что и у оставшегося мэра результат также делится на 2016. (*Ф. Петров*)

Решение. Назовём какой-нибудь город A *столицей*. Назовём город *чётным*, если маршрут из A до него содержит чётное число рейсов, и *нечётным* иначе (таким образом, город A чётный). Тогда чётность любых двух городов, соединённых рейсом, различна. Мы докажем, что сумма чисел, полученных мэрами чётных городов, равна сумме чисел, полученных мэрами нечётных; из этого следует утверждение задачи.

Назовём нумерацию городов *подходящей* для города X, если мэр города X её посчитал. Ясно, что в любой нумерации, подходящей городу X, он имеет номер 1, так что каждая нумерация подходит не более, чем одному городу.

Рассмотрим любую нумерацию, подходящую чётному городу E. Пусть номер 2 в ней носит город W; тогда W — нечётный город, соединённый с E, иначе на маршруте от E до W встретился бы город с бо́льшим номером. Поменяем местами номера 1 и 2; мы получим нумерацию, в которой номер 1 носит нечётный город W.

Рассмотрим любой маршрут m, начинающийся в W. Он получается из некоторого маршрута, выходящего из E, либо добавлением города W в начало (если m проходит через E), либо откидыванием E из начала (в противном случае). Тогда легко видеть, что после обмена 1 и 2 номера на m идут в порядке возрастания.

Итак, после перемены номеров 1 и 2 из нумерации, подходящей для чётного города, получается нумерация, подходящую для нечётного (и наоборот). Это сопоставление взаимно однозначно. Значит, тех и других нумераций поровну, что и требовалось доказать.

11.7. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство
$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}\,.$$
(*А. Храбров*)

Решение. Домножим доказываемое неравенство на $a^3b^3c^3d^3$, получим
$$a^3b^3c^3+a^3b^3d^3+a^3c^3d^3+b^3c^3d^3 \leqslant 1. \qquad (*)$$

Поскольку неравенство симметричное, можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. По неравенству о средних для чисел a, b и $(c+d)$ имеем
$$ab(c+d) \leqslant \left(\frac{a+b+(c+d)}{3}\right)^3 = 1.$$
Следовательно, $a^3b^3(c+d)^3 \leqslant 1$.

Значит, для доказательства $(*)$ достаточно показать, что
$$a^3b^3c^3+a^3b^3d^3+a^3c^3d^3+b^3c^3d^3 \leqslant a^3b^3(c+d)^3.$$
После раскрытия скобок и приведения подобных останется неравенство
$$a^3c^3d^3+b^3c^3d^3 \leqslant 3a^3b^3c^2d+3a^3b^3cd^2,$$
которое является суммой трех очевидных неравенств $a^3c^3d^3 \leqslant a^3b^3c^2d$, $b^3c^3d^3 \leqslant a^3b^3cd^2$ и $0 \leqslant 2a^3b^3c^2d+2a^3b^3cd^2$.

Замечание. Если допустить неотрицательные значения переменных, то в неравенстве $(*)$ равенство достигается лишь тогда, когда три числа равны 1 и одно равно 0.

11.8. В треугольнике ABC медианы AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в точке M. Построим окружность Ω_A, проходящую через середину отрезка AM и касающуюся отрезка BC в точке M_A. Аналогично строятся окружности Ω_B и Ω_C. Докажите, что окружности Ω_A, Ω_B и Ω_C имеют общую точку. (*А. Якубов*)

Решение. Лемма. *Пусть на сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1 так, что сумма их углов при вершинах A_1, B_1 и C_1 кратна* 180°. *Тогда окружности, описанные около треугольников A_1BC, AB_1C и ABC_1, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть окружности, описанные около треугольников A_1BC и ABC_1, вторично пересекаются в точке X (см. рис. 6). Тогда $\angle(BX, XC) = \angle(BA_1, A_1C)$ и $\angle(AX, XB) = \angle(AC_1, C_1B)$, откуда

$$\angle(AX, XC) = \angle(AX, XB) + \angle(BX, XC) =$$
$$= \angle(AC_1, C_1B) + \angle(BA_1, A_1C) = \angle(AB_1, B_1C).$$

Это означает, что X лежит на окружности, описанной около треугольника AB_1C, что и требовалось. □

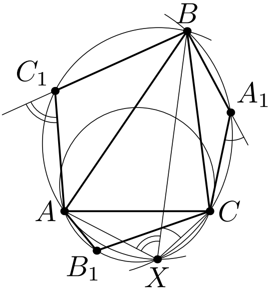

Рис. 6

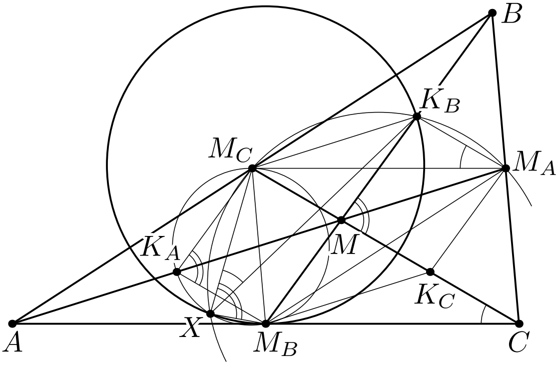

Рис. 7

Перейдём к решению задачи. Пусть K_A, K_B и K_C — середины отрезков AM, BM и CM соответственно (см. рис. 7). Тогда $M_CK_B \parallel AM$ и $K_BM_A \parallel MC$, как средние линии в треугольниках ABM и CBM соответственно; значит, $\angle M_CK_BM_A = \angle AMC$. Аналогично, $\angle M_CK_AM_B = \angle BMC$ и $\angle M_AK_CM_B = \angle BMA$; значит, $\angle M_CK_AM_B + \angle M_BK_CM_A + \angle M_AK_BM_C = 360^\circ$.

Согласно лемме, окружности, описанные около треугольников $M_C K_A M_B$, $M_B K_C M_A$ и $M_A K_B M_C$, имеют общую точку X. Из этих окружностей имеем

$$\angle(K_B X, XM_B) = \angle(K_B X, XM_C) + \angle(M_C X, XM_B) =$$
$$= \angle(K_B M_A, M_A M_C) + \angle(M_C K_A, K_A M_B) =$$
$$= \angle(MC, CA) + \angle(BM, MC) = \angle(BM, CA) = \angle(K_B M_B, AC).$$

Это равенство означает, что окружность Ω_B проходит через точку X. Аналогично, через X проходят окружности Ω_A и Ω_C.