10 класс

Задача 1. Сферическая горка

При произвольном угле α на шайбу действует сила нормального давления N и сила трения:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = N \operatorname{tg} \alpha.$$

Вектор силы реакции Q будет направлен к силе N под таким углом, что $\operatorname{tg} \beta = F_{\text{тр}}/N = \operatorname{tg} \alpha$. Откуда $\beta = \alpha$, следовательно, сила реакции Q направлена вертикально. Поэтому горизонтальная составляющая скорости будет постоянной и равной v_0.

1. Время движения:

$$\tau = \frac{R \cos(\pi/4)}{v_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{R}{v_0}.$$

2. Скорость шайбы в момент достижения горизонтальной поверхности будет равна $v_1 = \sqrt{2} v_0$. По закону сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgR + A_{\text{тр}} = \frac{mv_1^2}{2} + mgR \cos \frac{\pi}{4}.$$

Окончательно:

$$A_{\text{тр}} = -m \left(gR \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} - \frac{v_0^2}{2} \right).$$

3. Запишем второй закон Ньютона относительно оси, перпендикулярной горке

$$m \frac{(v_0/\cos \alpha)^2}{R} = mg \cos \alpha - N.$$

Отрыв произойдет при $N = 0$, при этом $v_0^2 = gR \cos^3 \alpha$. Поскольку $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4$, то отрыва не будет при $v_0 \leqslant \sqrt{gR/(2\sqrt{2})}$. Заметим, что при этих значениях v_0 работа $A_{\text{тр}}$ всегда отрицательна, как и должно быть для работы диссипативных сил.

Задача 2. Гранулы

Если n_1, n_2 и u_1, u_2 концентрации гранул и скорости течения на указанных в условии участках трубы, то $\nu = n_1 u_1 S$ и $\nu = n_2 u_2 S$. Несжимаемость жидкости выражается как постоянство объёмного расхода:

$$u_1 S(1 - n_1 V) = u_2 S\big(1 - n_2(V + \Delta V)\big).$$

Отсюда находится приращение скорости течения между указанными участками $\Delta u = u_2 - u_1 = \nu \Delta V/S$.

Рассмотрим смещение отрезка взвеси между указанными участками за время dt, задняя граница отрезка сместится вправо на $u_1 dt$, а передняя на $u_2 dt$.

В области пересечения картина течения прежняя. От исходного отрезка сзади «отрезается» кусок $u_1 dt$ с массой $dm = \mu dt$, а спереди добавляется кусок $u_2 dt$ с той же массой. Определим суммарную силу, действующую на отрезок взвеси, через изменение импульса:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}(u_2 - u_1) = \mu(u_2 - u_1) = \Delta pS,$$

$$\text{откуда} \qquad \mu = \frac{\Delta pS}{u_2 - u_1} = \frac{\Delta pS^2}{\nu \Delta V}.$$

Задача 3. Вода и лёд

1. Нахождение температуры при давлении p_1

$$t_1 = -\frac{p_1 - p_0}{133\ \text{атм}/{}^\circ\text{C}} = -1{,}50\,{}^\circ\text{C}.$$

Уравнение теплового баланса

$$q\Delta m_\text{л} = c_\text{в} m_0 (t_0 - t_1).$$

Изменение массы льда

$$\Delta m_\text{л} = \frac{c_\text{в} m_0 (t_0 - t_1)}{q} = 18{,}7\ \text{г}.$$

2. Изменение объёма системы происходит за счёт сжимаемости воды (ΔV_1) и за счёт образования льда (ΔV_2). Изменение за счёт сжимаемости

$$\Delta V_1 = GV(p_1 - p_0) = \frac{Gm_0(p_1 - p_0)}{\rho_\text{в}} = 9{,}95\ \text{см}^3 \approx 10{,}0\ \text{см}^3.$$

За счёт образования льда с учетом малости сжимаемости

$$\Delta V_2 = \Delta m_\text{л} \left(\frac{1}{\rho_\text{л}} - \frac{1}{\rho_\text{в}} \right) \approx 2{,}1\ \text{см}^3.$$

Изменение объёма системы

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 12{,}1\ \text{см}^3.$$

3. Считая, что давление линейно связано с изменением объёма, работа системы равна:

$$A_1 = p_\text{ср} \Delta V = \frac{p_0 + p_1}{2} \Delta V \approx 121\ \text{Дж}.$$

Задача 4. Диодная цепочка

1. При данном $U_0 = 4{,}4$ В открыты только первые 4 диода, поэтому на каждом из «открытых» диодов падает напряжение, равное $U_d = 1$ В. По

самому дальнему от места подключения источника питания резистору течёт ток силой меньше 1 А.

Токи через резисторы равны:

$$I_{R_1} = 3{,}4\text{ А},\quad I_{R_2} = 2{,}4\text{ А}\quad I_{R_3} = 1{,}4\text{ А}\quad I_{R_4} = 0{,}4\text{ А}.$$

Токи через диоды равны:

$$I_{D_1} = 7{,}6\text{ А},\quad I_{D_2} = 4{,}2\text{ А},\quad I_{D_3} = 1{,}8\text{ А},\quad I_{D_4} = 0{,}4\text{ А}.$$

2. При напряжении $U_{AB} < 1$ В ток в цепи вообще не течет. При напряжении U_{AB} от 1 В до 2 В ток идет через первый диод и первый резистор. Сила тока в этом случае равна

$$I = \frac{U_{AB} - 1\text{ В}}{1\text{ Ом}}.$$

В диапазоне от 2 В до 3 В открыты первый и второй диоды и токи текут по двум резисторам. При каждом увеличении напряжения на 1 В открывается ещё один диод. ВАХ выглядит так, как показано на рисунке (рис. 24).

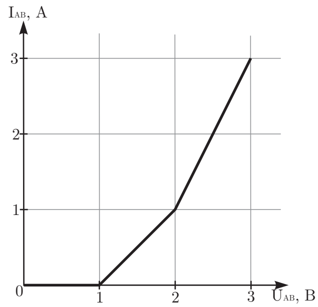

Рис. 24

3. Пусть открыты N диодов и токи текут по N резисторам, причем величина тока, текущего по последнему резистору $I < 1$ А. В этом случае напряжение U_{AB} равно $N\cdot(1\text{ В})+I\cdot(1\text{ Ом})$. Суммарный ток цепи (или ток, текущий через первый диод) находится в результате суммирования:

$$I_N = NI + (1 + 2 + 3 + \dots + N - 1)\cdot(1\text{ А}) = NI + \frac{(N-1)N}{2}\text{ (А)}.$$

При максимальном значении величины $I = 1$ А максимальный ток равен:

$$I_{N,\ \max} = \frac{N(N+1)}{2}\text{ (А)},$$

а при минимальном значении $I = 0$ А минимальный ток равен:

$$I_{N,\ \min} = \frac{N(N-1)}{2}\text{ (А)}.$$

При $N = 5$ максимальное значение $I_{\max} = 15$ А, а минимальное значение равно $I_{\min} = 10$ А. Сила тока 14 А находится в этом промежутке. Следовательно, $N = 5$ и $I = (4\text{ А})/5 = 0{,}8$ А. Значит, напряжение $U_{AB} = 5{,}8$ В.

Задача 5. Déjà vu

1. Пусть I_C — сила тока, идущего на зарядку конденсатора, а I_R — сила тока, протекающего через резистор R_2, включённый параллельно конденсатору, I — ток через источник, q_R — заряд, протекший через резистор R_2, а q_C —

заряд конденсатора, q — заряд, протекший через источник, U — напряжение на конденсаторе и резисторе R_2. Тогда

$$U = \frac{q}{C} = I_R R_2 = \mathscr{E} - IR_1,$$

откуда находим

$$I = \frac{\mathscr{E} - U}{R_1}, \qquad I_R = \frac{U}{R_2}, \qquad I_C = I - I_R = \frac{\mathscr{E}}{R_1} - U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Зависимость скорости изменения энергии конденсатора от напряжения на нём является квадратным трёхчленом

$$P = U \cdot I_C = U\left[\frac{\mathscr{E}}{R_1} - U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right],$$

максимум которого находится посередине между его корнями

$$U_m = \frac{\mathscr{E}}{2}\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad I_m = \frac{\mathscr{E}}{2R_1}.$$

Ток через источник в этот момент

$$I = I_R + I_C = \frac{U_m}{R_2} + I_m = \frac{\mathscr{E}}{2R_1}\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2},$$

а искомая мощность источника равна

$$N = \mathscr{E} I = \frac{\mathscr{E}^2}{2R_1}\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2}.$$

Запишем второе правило Кирхгофа для контура с резисторами ($R_1 = R_2 = R$)

$$\mathscr{E} = IR_1 + I_R R_2 = (I + I_R)R,$$

домножим это уравнение на Δt

$$\mathscr{E}\Delta t = (I\Delta t + I_R \Delta t)R = (\Delta q + \Delta q_R)R$$

и просуммируем по времени от 0 до t_0:

$$\mathscr{E} t_0 = (q + q_R)R = (2q - q_C)R. \qquad (q_R = q - q_C)$$

Отсюда с учётом

$$q_C = CU_m = \frac{C\mathscr{E}}{2}\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C\mathscr{E}}{4}$$

находим q

$$q = C\mathscr{E}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\ln 2\right).$$

Из закона сохранения энергии найдем количество теплоты Q, выделившееся в цепи при замкнутом ключе K:

$$Q = \mathscr{E} q - \frac{q_C^2}{2C} = \frac{C\mathscr{E}^2}{4}\left(\frac{3}{8} + \ln 2\right) = 0{,}27C\mathscr{E}^2.$$