Возможные решения

9 класс

Задача 1. Камни в колёсах

Поскольку колёса имеют одинаковые размеры и не проскальзывают, они вращаются с одинаковыми угловыми скоростями $\omega = v/R$. Поэтому угол между радиус-векторами камней $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ относительно центров колёс в любой момент времени составляет 90° (рис. 15).

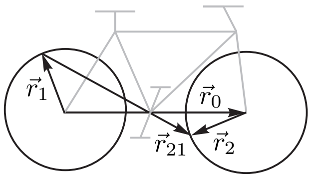

Рис. 15

Радиус-вектор $\vec{r}_{21}$ второго камня относительно первого можно найти из векторного равенства

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_0 + \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор центра переднего колеса относительно центра заднего. Так как угол между векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ всегда равен 90°, то вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ имеет длину $\sqrt{2}R$ и вращается с постоянной угловой скоростью, равной угловой скорости колёс. Таким образом, радиус-вектор второго камня относительно первого можно найти как сумму вектора $\vec{r}_0$ (который не меняется в процессе движения велосипеда) и вектора, имеющего длину $\sqrt{2}R$ и вращающегося с угловой скоростью ω. Сложение этих векторов показано на рисунке 16, причём концы векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_{21}$ лежат на окружности радиуса $\sqrt{2}R$ с центром в конце вектора $\vec{r}_0$.

Из рисунка 16 следует, что вектор $\vec{r}_{21}$ имеет минимальную длину в тот момент времени, когда вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ направлен противоположно вектору $\vec{r}_0$, максимальную — когда вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ направлен так же, как и вектор $\vec{r}_0$. Поэтому

$$r_{21}^{\min} = 3R - \sqrt{2}R = R(3 - \sqrt{2});$$
$$r_{21}^{\max} = 3R + \sqrt{2}R = R(3 + \sqrt{2}).$$

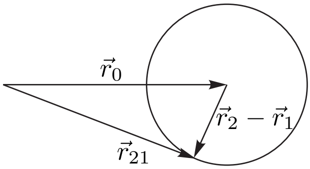

Рис. 16

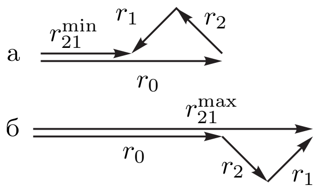

Рис. 17

Эти два случая показаны на рис. 17 а и б, соответственно. Длина вектора $\vec{r}_{21}$ будет максимальна, когда вектор $\vec{r}_2$ повернётся на угол $\pi/4$ по сравнению с начальным положением. Отсюда находим момент времени t, когда расстояние между камнями достигает максимального значения:

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi R}{4v}.$$

Задача 2. Неожиданный поворот

Пусть, для определённости, вектор силы в начальный момент направлен вправо.

Рассмотрим изменение скорости частицы за малые интервалы времени Δt. Для этого удобно воспользоваться геометрической интерпретацией векторного уравнения для изменения импульса $m(\vec{u} - \vec{v}) = \sum \vec{F}_i \Delta t$, где $\vec{F}_i$ — вектор силы F в произвольный момент времени.

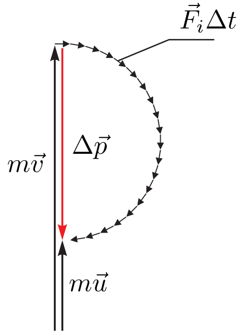

Рис. 18

Из рисунка видно, что суммарное изменение импульса частицы $\Delta\vec{p}$ направлено против её начальной скорости (изменения импульса в направлении перпендикулярном начальной скорости компенсируются за время поворота силы на $180°$).

Длина половины дуги окружности, образованной модулями изменения импульса точки, равна $\sum F\Delta t = F\sum \Delta t = F\tau$, где τ — время поворота вектора силы. Через длину дуги можно найти диаметр окружности $\Delta p = \dfrac{2F\tau}{\pi}$. Откуда $u = v - \dfrac{2F\tau}{m\pi}$.

Направление u совпадает с v при $v > \dfrac{2F\tau}{m\pi}$, в ином случае направление становится противоположным.

Заметим, что условию не противоречит и второй возможный вариант, в котором вектор силы изначально направлен влево. Тогда изменение скорости совпадает с направлением v и $u = v + \dfrac{2F\tau}{m\pi}$. В этом случае u всегда сонаправлена с v.

Задача 3. Перемещение скамейки

Найдём силу необходимую для поддержания равномерного движения скамейки с заехавшей на шероховатую область передней опорой. Для этого запишем правило моментов относительно точки O из сопутствующей ИСО, в которой скамейка покоится: $\mu N_1 h + mg\dfrac{L}{2} = N_1 L$,

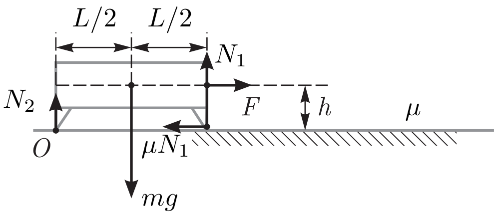

Рис. 19

здесь учтено, что $F_1 = \mu N_1$. Откуда $F_1 = \dfrac{\mu mgL}{2(L - \mu h)}$.

В случае, когда на шероховатую область заехали обе опоры, необходимо прикладывать силу $F_2 = \mu mg$. При движении по шероховатой поверхности только задней опоры, по аналогии с первым случаем, определяется сила $F_3 = \frac{\mu mgL}{2(L+\mu h)}$. Полную работу по перемещению скамейки можно представить в виде суммы работ на трёх участках:

$$A = F_1 L + F_2(S-L) + F_3 L = \mu mg\left[\frac{L^3}{L^2-\mu^2h^2} + S - L\right] = \mu mg\left[\frac{\mu^2h^2L}{L^2-\mu^2h^2} + S.\right]$$

Важно учесть ОДЗ для полученного ответа. На первый взгляд необходимо выполнение условия $L > \mu h$, но это не так. Существует более жёсткое и неявное ограничение. Наш ответ был получен в предположении сохранения контакта с поверхностью обеими опорами. Найдём, при каком соотношении величин начнётся опрокидывание скамейки относительно передней ножки. На грани опрокидывания сила N_2 исчезнет, а N_1 станет равна mg. Тогда из правила моментов относительно точки A получим: $\mu h N_1 = \frac{L}{2}N_1$, то есть сохранение контакта возможно лишь при $L > 2\mu h$.

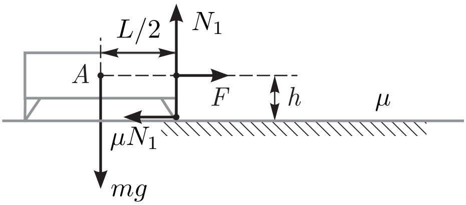

Рис. 20

Задача 4. Кофе с молоком

В установившемся режиме температура вдоль трубы меняется линейно. Это можно показать, рассмотрев изменение температуры на небольшом смещении вдоль трубы. Из уравнения теплового баланса следует, что изменения температур жидкостей одинаковы (здесь учтено, что за одинаковое время обмениваются теплом одинаковые массы жидкостей). Другими словами, если в некоторой месте теплообменника температуры кофе и молока равны $t_к$ и $t_м$ соответственно, то на небольшом расстоянии Δx они станут равны $t_к + \Delta t$ и $t_м + \Delta t$, при этом сохранится разность температур и мощность теплообмена. Пошагово можно повторять эту процедуру до другого края теплообменника. Распределение температур вдоль труб приведено на графике (рис. 21):

$$\Delta t_1 = t_3 - t_1 = 50\,^\circ\text{C}.$$

Так как изменения температур равны, то температура кофе на выходе

$$t_4 = t_2 - \Delta t_1 = 40\,^\circ\text{C}.$$

Расстояние s между участками труб с одинаковыми температурами можно найти из подобия треугольников:

$$\frac{s}{L} = \frac{t_2 - \Delta t_1 - t_1}{\Delta t_1}, \qquad \text{откуда} \qquad s = 3 \text{ м}.$$

Свяжем мощности переданного и полученного тепла:

$$\mu c\Delta t_1 = \alpha(t_2 - \Delta t_1 - t_1),$$

где α — некоторая константа, связанная с теплопроводящими свойствами внутренней трубы и жидкостей. После изменения расхода жидкостей до $\mu' = 2\mu$ уравнение связи примет вид

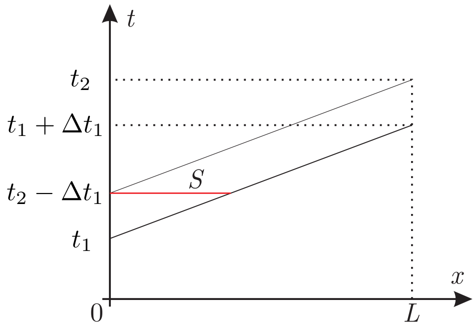

Рис. 21

$$2\mu c\Delta t_1' = \alpha(t_2 - \Delta t_1' - t_1).$$

Здесь учтено, что мощность изменится из-за уменьшения разности температур. Решая систему уравнений относительно нового изменения температур $\Delta t_1'$, получим $\Delta t_1' = 36{,}4\,^\circ\mathrm{C}$. Откуда температура на выходе у молока $t_3' = 46{,}4\,^\circ\mathrm{C}$, у кофе $t_4' = 53{,}6\,^\circ\mathrm{C}$.

Задача 5. Тетраэдр с прибором

Для тетраэдра с амперметром обозначим узлы и нарисуем эквивалентную схему с учётом равенства нулю сопротивления амперметра. Расставим в эквивалентной схеме токи с учётом закона Ома обратно-пропорционально сопротивлениям параллельных ветвей и с учётом закона сохранения заряда для узлов. Затем отметим найденные токи на исходной схеме.

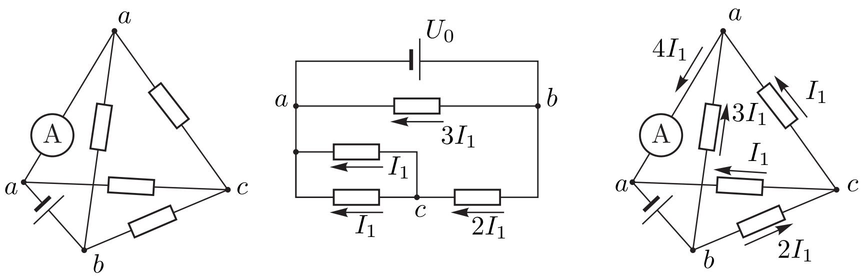

Рис. 22

Для ветви ab запишем $U_0 = 3I_1R$, откуда ток через амперметр

$$I_A = 4I_1 = \frac{4U_0}{3R}.$$

Повторим вышеперечисленные действия с тетраэдром, содержащим вольтметр, имеющий бесконечно большое сопротивление.

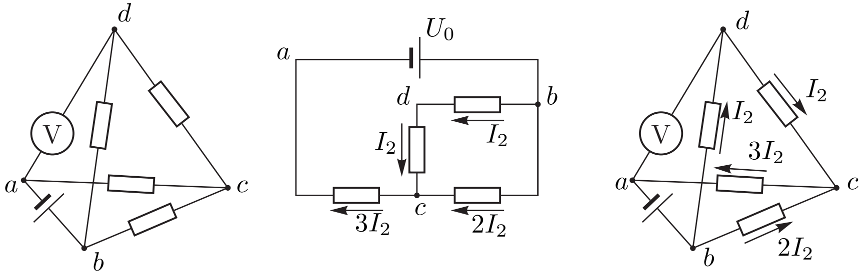

Рис. 23

Напряжение между узлами ab равно $U_0 = 3I_2R + 2I_2R$, откуда показания вольтметра $U = 4I_2R = (4/5)U_0$. Выражая искомые величины, получим:

$$U_0 = \frac{5}{4}U = 15\ \text{В} \qquad \text{и} \qquad R = \frac{5}{3}\frac{U}{I_A} = 10\ \text{Ом}.$$