## 10 класс

**10.1.** В клетках квадрата $3 \times 3$ записаны буквы (см. рисунок). Можно ли их расставить так, чтобы любые две буквы, исходно отстоявшие на ход коня, после перестановки оказались в клетках, отстоящих на ход короля? (*Например, из клетки с буквой $a$ конь может пойти в клетки с буквами $f$ и $h$, а король — в клетки с буквами $b$, $d$ и $e$.*)

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

**Ответ:** да, можно. Например, см. рис. 10.1.

**Комментарий.** Покажем, из каких соображений можно построить пример. Заметим, что каждая клетка, исключая центральную, соединена ходом коня ровно с двумя клетками. Начав обходить поле ходом коня с клетки $a$, обнаружим, что такой обход — единственный (с точностью до направления): $a–h–c–d–i–b–g–f–a$. Для того, чтобы получить пример, запишем получившуюся цепочку букв последовательно в каемку квадрата (начав с любой ее клетки), а центральную букву оставим без изменений.

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $h$ | $c$ |
| $f$ | $e$ | $d$ |
| $g$ | $b$ | $i$ |

Рис. 10.1

**Критерии проверки**

+ *приведен любой из возможных примеров*

± *приведены несколько примеров, среди которых есть как верные, так и неверные*

− *приведен только ответ «да»*

− *задача не решена или решена неверно*

**10.2.** Каково наибольшее количество последовательных натуральных чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя (включая 1 и само число)?

**Ответ:** три числа.

**Решение.** Предположим, что найдутся четыре подряд идущих числа, удовлетворяющих условию. Заметим, что среди четырех подряд идущих чисел одно делится на 4. Тогда в разложении этого числа на простые множители есть не менее двух двоек. Если есть еще простой делитель $p$, отличный от двойки, то делителей у числа не менее шести: 1, 2, 4, $p$, $2p$, $4p$. Если в разложении есть только двойки, то для того, чтобы делителей было ровно четыре (1, 2, 4, 8), двоек должно быть ровно три. Итак, существует единственное делящееся на 4 число, у которого ровно четыре делителя — число 8. Его соседи (7 и 9) условию не удовлетворяют, поэтому искомых чисел не более трех.

Пример трех подряд идущих чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя: 33, 34, 35. Есть и другие примеры.

**Критерии проверки**

+ *приведено полное обоснованное решение*

± *приведено в целом верное, но недостаточно обоснованное решение (не содержащее неверных утверждений). Например, приведен верный ответ и верный пример, указано, что среди четырех подряд идущих чисел одно делится на 4, но случай $n = 8$ не упоминается*

∓ *приведен верный ответ и верный пример, но в рассуждениях допущена ошибка. Например, указано, что любое число, кратное четырем, имеет больше четырех делителей*

∓ *приведены только верный ответ и верный пример*

− *приведен только ответ «три числа»*

− *задача не решена или решена неверно*

**10.3.** В остроугольном треугольнике $MKN$ проведена биссектриса $KL$. Точка $X$ на стороне $MK$ такова, что $KX = KN$. Докажите, что прямые $KO$ и $XL$ перпендикулярны ($O$ — центр описанной окружности треугольника $MKN$).

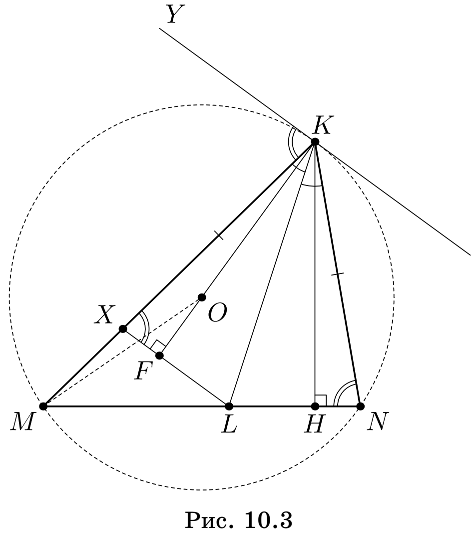

Рис. 10.3

**Решение.** Пусть $F$ — точка пересечения прямых $KO$ и $XL$ (см. рис. 10.3). Докажем, что $\angle KFX = 90°$. Можно рассуждать различными способами.

*Первый способ.* Обозначим $\angle KNL = \alpha$. Тогда центральный угол $\angle MOK = 2\alpha$, а $\angle XKO = \angle MKO = 90° - \alpha$ (∗). Из условия задачи следует, что треугольники $XKL$ и $NKL$ равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle KXL = \angle KNL = \alpha$ (∗∗). Тогда в треугольнике $XKF$: $\angle KFX = 180° - (90° - \alpha) - \alpha = 90°$, что и требовалось.

*Второй способ.* Проведем высоту $KH$ треугольника $MKN$. Тогда из $(*)$ следует, что $\angle MKO = \angle NKH$. При симметрии относительно прямой $KL$ точка $N$ переходит в точку $X$, прямая $LN$ переходит в прямую $LX$, прямая $KH$ переходит в прямую $KO$.

Поскольку $KH \perp LN$, то и образы этих прямых при симметрии также перпендикулярны, следовательно, $KO \perp XL$.

*Третий способ.* Пусть $KY$ — касательная к описанной окружности треугольника $MKN$. Докажем, что $KY \parallel XL$, из чего и будет следовать утверждение задачи. Используя угол между касательной и хордой и утверждение $(**)$, получим, что $\angle YKX = \angle KNL = \angle KXL$, что и требовалось.

**Комментарий.** Ученик имеет право без доказательства использовать следующий факт: прямые $KO$ и $KH$ симметричны относительно биссектрисы угла $K$ треугольника $MKN$.

**Критерии проверки**

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

**10.4.** Даны три квадратных трехчлена: $x^2 + b_1x + c_1$, $x^2 + b_2x + c_2$ и $x^2 + \frac{b_1+b_2}{2}x + \frac{c_1+c_2}{2}$. Известно, что их сумма имеет корни (возможно, два совпадающих). Докажите, что хотя бы у двух из этих трехчленов также есть корни (возможно, два совпадающих).

**Решение.** Обозначим данные квадратные трехчлены через $f_1$, $f_2$ и $f_3$ соответственно. Тогда $2f_3 = f_1 + f_2$, а $f_1 + f_2 + f_3 = 3f_3 = \frac{3}{2}(f_1 + f_2)$. Поскольку сумма всех трех трехчленов имеет корни, то и $3f_3$ и $\frac{3}{2}(f_1 + f_2)$ также имеют корни. Следовательно, у третьего трехчлена и у суммы первых двух есть корни.

Осталось доказать, что хотя бы один из первых двух трехчленов имеет корни. Это можно сделать различными способами.

*Первый способ.* Предположим, что это не так и корней ни у одного из них нет. Поскольку оба трехчлена — приведенные, то они принимают только положительные значения, следовательно, их сумма также принимает только положительные значения, то есть не может иметь корней. Полученное противоречие завершает решение задачи.

*Второй способ.* Пусть $f_3$ имеет корни, а $f_1$ и $f_2$ не имеют корней. Записав дискриминанты этих трехчленов, получим:

$$\frac{(b_1+b_2)^2}{4} - 2(c_1+c_2) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b_1+b_2)^2 \geqslant 8(c+c_2), \tag{1}$$

$$b_1^2 - 4c_1 < 0, \tag{2}$$

$$b_2^2 - 4c_2 < 0. \tag{3}$$

Заметим, что $2(b_1^2 + b_2^2) \geqslant b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2$ (см. (1)), то есть, $b_1^2 + b_2^2 \geqslant \frac{(b_1+b_2)^2}{2} \geqslant 4(c_1 + c_2)$. С другой стороны, сложив неравенства (2) и (3), получим, что $b_1^2 + b_2^2 < 4(c_1 + c_2)$. Полученное противоречие завершает доказательство.

**Критерии проверки**

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *в записи неравенства* (1) *вместо знака* $\geqslant$ *используется знак* $>$

$\mp$ *доказано только, что* $f_3$ *имеет корни*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

**10.5.** В турнире участвовали 50 шахматистов. В некоторый момент турнира была сыграна 61 партия, причем каждый участник сыграл либо две партии, либо три (и никто не играл друг с другом дважды). Могло ли оказаться так, что никакие два шахматиста, сыгравшие по три партии, не играли между собой?

**Ответ:** нет, не могло.

**Решение.** Пусть к рассматриваемому моменту турнира $x$ шахматистов сыграло по три партии, а $50 - x$ — по две. Поскольку в каждой партии участвуют два шахматиста, то суммарное количество сыгранных к этому моменту партий равно $\frac{3x + 2(50-x)}{2}$. Из уравнения $\frac{3x + 2(50-x)}{2} = 61$ находим $x = 22$.

Предположим теперь, что никакие два шахматиста, сыгравшие по три партии, не играли между собой. Тогда все игры, которые они провели, были сыграны с шахматистами, сыгравшими по две партии. Таких игр $3 \cdot 22 = 66 > 61$, что противоречит условию задачи.

**Критерии проверки**

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ верно найдено только количество участников, сыгравших три партии

$-$ *приведен только верный ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

**10.6.** Через точку $P$ проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника $ABC$ (см. рисунок). Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

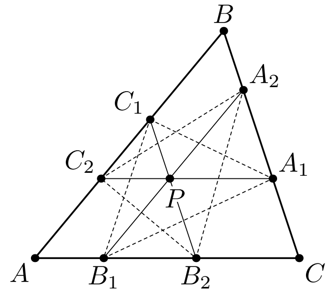


Рис. 10.5а

**Решение.** Заметим, что $S_{A_2B_2C_2} = S_{A_2C_2P} + S_{B_2C_2P} + S_{A_2B_2P}$, а $S_{A_1B_1C_1} = S_{A_1C_1P} + S_{B_1C_1P} + S_{A_1B_1P}$. Докажем, что $S_{A_2C_2P} = S_{A_1C_1P}$ (для других пар площадей равенство доказывается аналогично). Это можно доказать различными способами.

*Первый способ.* Поскольку $C_2PA_2B$ — трапеция, то $S_{C_2A_2P} = S_{BA_2P}$. Так как $BC_1PA_2$ — параллелограмм, то $S_{BA_2P} = S_{BC_1P}$. И, наконец, из того, что $BC_1PA_1$ — трапеция, получим, что $S_{BC_1P} = S_{A_1C_1P}$. Следовательно, $S_{A_2C_2P} = S_{A_1C_1P}$, что и требовалось.

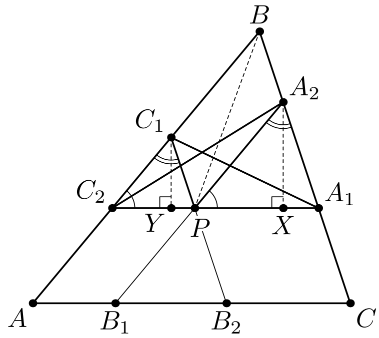


Рис. 10.5б

*Второй способ.* Пусть $X$ и $Y$ — основания перпендикуляров, опущенных из точек $A_2$ и $C_1$ на отрезок $A_1C_2$. Тогда $S_{C_2A_2P} = \frac{1}{2}C_2P \cdot A_2X$ и $S_{C_1A_1P} = \frac{1}{2}PA_1 \cdot C_1Y$. Треугольники $C_2C_1P$ и $PA_2A_1$ подобны (соответствующие стороны параллельны), поэтому $C_1Y : A_2X = C_2P : PA_1$, следовательно, $S_{A_2C_2P} = S_{A_1C_1P}$.

Существуют и «вычислительные» решения. Приведем одно из них.

*Третий способ.* Докажем, что $S_{B_2AC_2} + S_{C_2BA_2} + S_{A_2CB_2} = S_{B_1AC_1} + S_{C_1BA_1} + S_{A_1CB_1}$ (см. рис. 10.5а). Не теряя общности, можно считать, что площадь треугольника $ABC$ равна 1. Пусть $AB_2 : B_2C = p : (1-p)$, $CA_2 : A_2B = q : (1-q)$, а $BC_2 : C_2A = r : (1-r)$. Тогда, используя отношение площадей треугольников с общим углом, получим, что $S_{B_2AC_2} = p(1-r)$, $S_{C_2BA_2} = r(1-q)$, $S_{A_2CB_2} = q(1-p)$. То есть, $S_{B_2AC_2} + S_{C_2BA_2} + S_{A_2CB_2} = p + q + r - pr - pq - rq$.

Из теоремы о пропорциональных отрезках следует, что $AB_1 : AC = 1 - q$, $AC_1 : AB = p$ и $BA_1 : BC = r$. Следовательно, $S_{B_1AC_1} + S_{C_1BA_1} + S_{A_1CB_1} = (1-q)p + r(1-p) + q(1-r) = p + q + r - pr - pq - rq$, что и требовалось.

**Критерии проверки**

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *присутствует идея рассмотрения равновеликих треугольников (см. первый и второй способы) или идея подсчета дополнения до треугольника (см. третий способ), но доказательство не доведено до конца или содержит ошибку*

$-$ *задача решена в конкретном частном случае, например, равностороннего треугольника, или рассмотрено конкретное расположение точки $P$ (например, точка пересечения медиан)*

$-$ *задача не решена или решена неверно*