10 класс

10.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Только 0.

Решение. Пусть i-й трёхчлен имеет вид $f_i(x) = ax^2+bx+c_i$. Тогда

$$f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1,$$

поскольку $f_1(x_1) = 0$. Аналогично получаем равенства $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \ldots, f_{100}(x_{99}) = c_{100} - c_{99}$ и $f_1(x_{100}) = c_1 - c_{100}$.

Складывая полученные равенства, получаем

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_1(x_{100}) = (c_2 - c_1) + \ldots + (c_1 - c_{100}) = 0.$$

Значит, единственное возможное значение суммы — ноль.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.

10.2. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. Нет, не может.

Решение. Предположим противное. Заметим, что число, оканчивающееся на 2016, обязательно делится на 16.

Среди десяти петиных чисел есть либо одно, либо два числа, делящихся на 8. В первом случае одно из полученных наименьших общих кратных (НОК) делится на 8, а второе — нет, и потому их сумма не делится даже на 8. Во втором же случае разность двух петиных чисел, делящихся на 8, равна 8, поэтому одно из них делится на 16, а другое — нет. Следовательно, одно из НОК делится на 16, а другое — нет. Значит, и в этом случае сумма НОК делиться на 16 не может.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Разобран только случай, когда на 8 делится ровно одно число из десяти — 3 балла.

10.3. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырехугольник, то и $ADML$ тоже вписан. (*Т. Зиманов, П. Кожевников*)

Решение. В случае $AB \parallel CD$ имеем $BC = KN$, поэтому $AK = BL = CM = DN$. Значит, четырёхугольник $LMDA$ получается из $BCNK$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{BL}$.

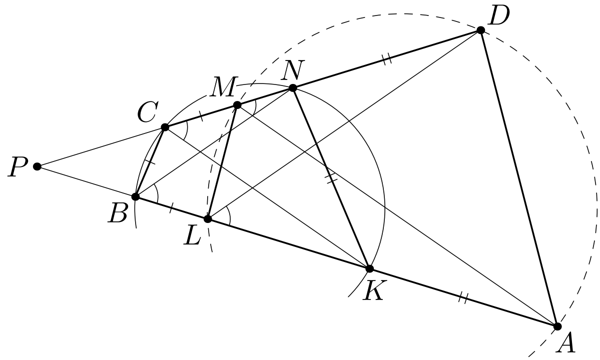

Рис. 2

Пусть теперь AB и CD не параллельны; обозначим через P точку пересечения прямых AB и CD. Так как четырёхугольник $BCNK$ вписан, треугольники PBC и PNK подобны; отсюда $\frac{PB}{BL} = \frac{PB}{BC} = \frac{PN}{NK} = \frac{PN}{ND}$. Значит, $BN \parallel LD$ (см. рис. 2). Аналогично, $CK \parallel MA$. Отсюда получаем $\angle ALD = \angle KBN$ и $\angle KCN = \angle AMD$.

Так как четырёхугольник $BCNK$ вписан, то $\angle KBN = \angle KCN$. Поэтому и $\angle ALD = \angle AMD$, то есть $ADML$ также вписан.

Замечание. Есть и другие решения; например, из равенств $\angle AKN = \angle NCB$ и $\angle DNK = \angle KBC$ следует, что четырехугольники $BCML$ и $NKAD$ подобны, поэтому $\angle BLM = \angle MDA$.

Комментарий. Доказано, что $BN \parallel LD$ (или $CK \parallel MA$, или обе эти параллельности) — 3 балла.

Верное доказательство подобия четырехугольников $BCLM$ и $NKAD$ — не менее 3 баллов.

За рассмотрение частного случая, скажем $AB \parallel CD$ — 0 баллов.

Если предъявлено верное решение, формально не работающее в случае $AB \parallel CD$ — баллы не снимаются.

10.4. Дана клетчатая таблица 100×100, клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток? (*И. Богданов*)

Ответ. $6 \cdot 50^2 - 5 \cdot 50 + 1 = 14\,751$ пар.

Решение. Обозначим длину стороны таблицы через $2n = 100$ (так что $n = 50$) и пронумеруем строки сверху вниз, а столбцы — слева направо числами от 1 до $2n$.

В каждой строке может быть от 0 до $2n$ чёрных клеток. Так как количества чёрных клеток во всех строках различны, эти количества — все числа от 0 до $2n$, кроме одного (скажем, кроме k). Тогда общее число чёрных клеток равно $(0+1+\ldots+2n) - k = 2n^2 + n - k$. С другой стороны, так как во всех столбцах клеток поровну, общее число чёрных клеток должно делиться на $2n$. Значит, $k = n$, и во всех столбцах по $2n^2/(2n) = n$ чёрных клеток.

Оценим теперь сверху количество пар соседних по стороне разноцветных клеток, считая отдельно пары клеток, соседних по горизонтали и по вертикали.

Если в строке $i \leqslant n-1$ чёрных клеток, то они могут участвовать не более, чем в $2i$ горизонтальных парах. Если в строке $i \geqslant n+1$ чёрных клеток, аналогичное рассуждение можно применить к белым клеткам, коих $2n - i \leqslant n-1$. Итого, горизонтальных разноцветных пар не больше, чем $2 \cdot (2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + \ldots + 2 \cdot (n-1)) = 2n(n-1)$.

Оценим теперь количество вертикальных пар. Рассмотрим любую строку с чётным номером от 2 до $2(n-1)$; пусть в ней i чёрных клеток. Тогда либо в строке сверху, либо в строке снизу от неё число чёрных клеток не равно $100 - i$; значит, одна из вертикальных пар, в которых участвуют клетки нашей строки, будет одноцветной. Итого, есть хотя бы $n - 1$ одноцветных вертикальных пар. Так как общее число вертикальных пар равно $2n(2n - 1)$, то разноцветных из них — не больше, чем $2n(2n - 1) - (n - 1)$. Итого, общее число разноцветных пар не больше, чем $2n(n - 1) + (4n^2 - 3n + 1) = 6n^2 - 5n + 1 = 14751$.

Осталось привести пример, в котором указанное число пар достигается. Проведём в нашей таблице $2n \times 2n$ диагональ из верхнего левого угла в нижний правый. Все клетки, лежащие на или ниже диагонали, покрасим в чёрный цвет, если они лежат в чётных строках, и в белый — иначе (раскраска «по строкам»). Все клетки, лежащие выше диагонали, покрасим в чёрный цвет, если сумма номеров их строки и столбца чётна, и в белый иначе («шахматная» раскраска). Пример такой раскраски при $n = 4$ показан на рис. 3. Нетрудно проверить, что в каждом столбце ровно по n чёрных клеток, в $2i$-й строке есть $n + i$ чёрных клеток, а в $(2i - 1)$-й строке — $n - i$ чёрных клеток. Кроме того, все оценки выше достигаются.

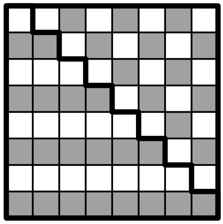

Рис. 3

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ и верный пример — 2 балла.

Только доказательство точной оценки — 4 балла.

Доказательство точной оценки только на количество вертикальных или только на количество горизонтальных разноцветных пар — 2 балла (могут складываться с баллами за правильный пример).

Доказано, что в таблице нет строки, содержащей ровно 50 чёрных клеток — ставится 1 балл, если в работе нет других существенных продвижений (иначе этот балл не добавляется).