10 класс

10.5. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из действительных чисел, *полным*, если для любых действительных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Такое множество одно: это множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Первое решение. Пусть A — полное множество. Поскольку оно непусто, то можно выбрать элемент $a \in A$. Тогда $a + 0 = a \in A$, значит, $a \cdot 0 = 0 \in A$. Так как $(-x) + x = 0 \in A$, получаем теперь, что $(-x) \cdot x = -x^2 \in A$ при всех действительных x. В силу произвольности выбора x отсюда следует, что любое отрицательное число также принадлежит множеству A.

Наконец, для любого $b > 0$ из того, что число $(-b) + (-b) = -2b$ лежит в A, получаем, что $b^2 = (-b) \cdot (-b) \in A$. Значит, и произвольное положительное число также лежит в A. Итак, в A входят все действительные числа.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем произвольный элемент $s \in A$. Докажем, что любое $t \leqslant 0$ лежит в A. Рассмотрим уравнение $x^2 - sx + t = 0$; его дискриминант неотрицателен, так что оно имеет два (возможно, совпадающих) корня a и b. Тогда по теореме Виета имеем $a + b = t$ и $ab = s$. Поскольку $a + b = s \in A$, получаем, что и $t \in A$.

Осталось показать, что любое $u > 0$ также лежит в A. По доказанному выше, $(-u) + (-1) \in A$; значит, и $(-u) \cdot (-1) = u$ также лежит в A.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что полное множество содержит все отрицательные (или все неположительные) числа — 3 балла.

10.6. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I, касающаяся отрезков AB, CD и DA. Окружность, описанная около треугольника BIC, вторично пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что прямая CE касается окружности ω. (*Б. Обухов*)

Решение. Заметим, что I лежит на оси симметрии трапеции, поэтому $\angle ICD = \angle IBA$. Пользуясь вписанностью четырехугольника $CBEI$, получаем $\angle ICD = \angle IBA = \angle IBE = \angle ICE$. Так как прямая CD касается окружности ω, то и прямая CE, симметричная ей относительно CI, также касается ω.

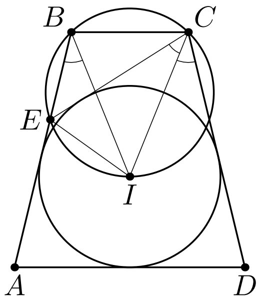

Рис. 4

Замечание. Есть и другие решения, например, с использованием равенств $\angle IEA = \angle ICB = \angle IBC = \angle IEC$.

Комментарий. Показано, что точка I лежит на оси симметрии трапеции, или эквивалентные продвижения — 0 баллов.

10.7. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах. (*Н. Власова*)

Решение. Заметим сразу, что на *любой* дуге между членами хорошей пары поровну девочек и мальчиков.

Пусть D — девочка, участвующая в 10 хороших парах. Обозначим всех детей по часовой стрелке $K_1, K_2, \ldots, K_{2n}$ так, что K_1 — это D, и продолжим нумерацию циклически (например, $K_0 = K_{2n}$ и $K_{2n+1} = K_1$). При $i = 1, 2, \ldots, 2n$ обозначим через d_i разность между количествами девочек и мальчиков среди $K_1, K_2, \ldots, K_i$; в частности, $d_1 = 1 - 0 = 1$ и $d_{2n} = 0$ (поэтому можно продолжить эту последовательность, полагая $d_{2n+1} = d_1$ и т. д.). Девочка D образует с K_i хорошую пару тогда и только тогда, когда $d_i = 0$ и K_i — мальчик, т. е. $d_i = 0$ и $d_{i-1} = 1$. Итак, найдутся ровно 10 индексов i с такими свойствами.

Рассмотрим любого мальчика $M = K_s$, образующего с D хорошую пару; тогда $d_s = 0$ и $d_{s-1} = 1$. Аналогично получаем, мальчик M образует хорошую пару с K_i ровно тогда, когда $d_s = d_{i-1}$ и K_i — девочка (то есть $d_{i-1} = 0$ и $d_i = 1$).

Заметим, что любые два числа d_i и d_{i+1} отличаются на единицу. Разобьём их на группы последовательных чисел, не меньших единицы, и группы последовательных чисел, не бóльших нуля. Тогда при обходе круга по часовой стрелке «переходов» из первых групп во вторые будет столько же, сколько и «переходов» из вторых групп в первые. Значит, у M столько же хороших напарниц, сколько у D хороших напарников. Это и требовалось доказать.

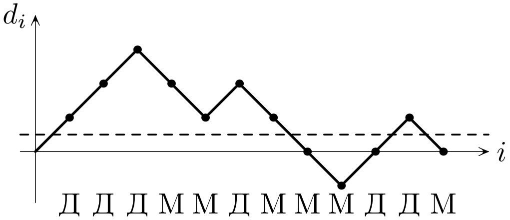

Рис. 5

Замечание 1. Это решение можно визуализировать, нарисовав «график» последовательности (d_i) (см. рис. 5). Тогда появление хорошего напарника у D означает, что график пересекает прямую $d = 1/2$ сверху вниз, а появление хорошей напарницы у M — пересечение той же прямой снизу вверх.

Замечание 2. Из решения следует, что, если девочка образует хорошую пару с двумя мальчиками, то любая девочка, образующая хорошую пару с одним из этих мальчиков, образует её и с другим. Более того, все дети разбиваются на непересекающиеся группы (в каждой группе поровну мальчиков и девочек) так, что каждый мальчик образует хорошие пары со всеми девочками из своей группы и только с ними, и то же верно для любой девочки. При этом, при обходе по кругу мальчики и девочки из одной группы чередуются.

Существуют решения, доказывающие этот факт напрямую (например, индукцией по числу детей).

10.8. Найдите все пары различных действительных чисел x и y такие, что $x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x - y)$ и $x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x - y)$.

(*И. Богданов*)

Ответ. $(x, y) = (2, 0)$ и $(x, y) = (0, 2)$.

Решение. Для удобства сделаем замену $x = 2a$ и $y = 2b$. Тогда из условия имеем $(2a)^{100} - (2b)^{100} = 2^{99} \cdot (2a - 2b)$ и

$(2a)^{200} - (2b)^{200} = 2^{199} \cdot (2a - 2b)$. Сократив оба равенства на степени двойки, получаем $a^{100} - b^{100} = a^{200} - b^{200} = a - b \neq 0$. Поделив второе выражение на первое, получаем $a^{100} + b^{100} = 1$; значит, каждое из чисел a и b по модулю не превосходит 1.

Если $b = 0$, то $a^{100} = a$, откуда $a = 1$. Аналогично, если $a = 0$, то $b = 1$; это приводит к двум ответам $(x, y) = (2, 0)$ и $(x, y) = (0, 2)$.

Пусть теперь $ab \neq 0$; тогда $|a|, |b| < 1$. Заметим, что значения функции $f(x) = x^{100} - x = x(x^{99} - 1)$ положительны при $x \in (-1, 0)$ и отрицательны при $x \in (0, 1)$. Поскольку $a^{100} - b^{100} = a - b$, имеем $f(a) = f(b)$, поэтому числа a и b имеют одинаковый знак.

С другой стороны,

$$1 = \frac{a^{100} - b^{100}}{a - b} = a^{99} + a^{98}b + a^{97}b^2 + \ldots + b^{99}. \qquad (*)$$

Если a и b отрицательны, то правая часть в $(*)$ также отрицательна, что невозможно. Если же a и b положительны, то все слагаемые в правой части $(*)$ положительны, поэтому она больше, чем $a^{99} + b^{99}$; итак, $a^{99} + b^{99} < 1$. С другой стороны, поскольку $0 < |a|, |b| < 1$, имеем $a^{99} + b^{99} > a^{100} + b^{100} = 1$. Противоречие.

Замечание. После получения неравенства $(*)$ решение можно завершить разными способами — например, с использованием неравенства

$$(a^{99} + a^{98}b + a^{97}b^2 + \ldots + b^{99})^{100} > (a^{100} + b^{100})^{99},$$

справедливого при $ab > 0$. Это неравенство можно доказать, раскрыв скобки и установив, что коэффициент при любом одночлене слева не меньше, чем коэффициент при таком же одночлене справа.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Переход от чисел x и y к числам $a = x/2$ и $b = y/2$ — 0 баллов.

Доказано, что ненулевые числа x и y не могут иметь разные знаки — 3 балла.

Доказано, что ненулевые числа x и y не могут иметь один знак — 3 балла.