Материалы для проведения заключительного этапа

XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2016–2017 учебный год

Второй день

Калининград, 24–30 апреля 2017 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, М. П. Каленков, Д. В. Карпов, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, С. И. Токарев, А. Д. Труфанов, Б. В. Трушин, М. А. Фадин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, В. З. Шарич. О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.5. На доске написаны $n > 3$ различных натуральных чисел, меньших, чем $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$. Для каждой пары этих чисел Серёжа поделил большее на меньшее с остатком и записал в тетрадку полученное неполное частное (так, если бы он делил 100 на 7, то он бы получил $100 = 14 \cdot 7 + 2$ и записал бы в тетрадку число 14). Докажите, что среди чисел в тетрадке найдутся два равных. (*С. Берлов*)

Решение. Предположим противное. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа на доске в порядке возрастания, а q_i — неполное частное от деления a_{i+1} на a_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$); тогда $a_{i+1} \geqslant q_i a_i$. Так как все q_i различны, имеем $q_1 q_2 \ldots q_{n-1} \geqslant (n-1)!$. Значит,

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \geqslant q_{n-1} q_{n-2} \ldots q_1 \geqslant (n-1)!.$$

Это невозможно, если a_1 и a_n — натуральные числа, меньшие $(n-1)!$.

9.6. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел a, b и c найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3 и c^3? (*А. Храбров*)

Ответ. Да, верно.

Решение. Покажем, что трёхчлен

$$f(x) = (a+b+c)x^2 - (ab+bc+ca)x + abc = x^3 - (x-a)(x-b)(x-c)$$

подходит. Ясно, что его коэффициенты целые и старший коэффициент $a+b+c$ положителен. Наконец, легко видеть, что $f(a) = a^3 - 0 = a^3$; аналогично, $f(b) = b^3$ и $f(c) = c^3$.

9.7. Неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 60^\circ$, вписан в окружность Ω. На биссектрисе угла BAC выбрана точка A', а на биссектрисе угла ABC — точка B' так, что $AB' \parallel BC$ и $BA' \parallel AC$. Прямая $A'B'$ пересекает Ω в точках D и E. Докажите, что треугольник CDE равнобедренный. (*А. Кузнецов*)

Решение. Из параллельности прямых AB' и BC получаем, что $\angle AB'B = \angle CBB' = \angle ABB'$. Значит, $AB' = AB$. Аналогично, $AB = A'B$. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$. Пусть, без ограничения общности, $\alpha > \beta$.

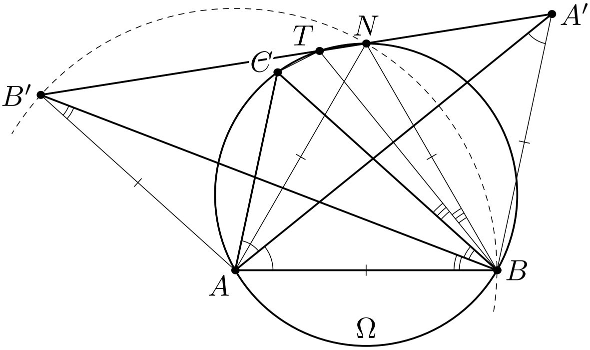

Рис. 1

Обозначим через N середину дуги ACB окружности Ω (см. рис. 1). Тогда $AN = BN$ и $\angle ANB = \angle ACB = 60^\circ$; значит, треугольник ABN равносторонний, и $AN = BN = AB = A'B = B'A$. Поэтому точка A — центр окружности, описанной около треугольника BNB'. Заметим тогда, что $\angle NBB' = \angle NBA - \angle ABB' = 60^\circ - \beta$, откуда $\angle NAB' = 2\angle NBB' = 120^\circ - 2\beta$ и $\angle ANB' = 90^\circ - \angle NAB'/2 = 30^\circ + \beta$. Аналогично, $\angle BNA' = 30^\circ + \alpha$, откуда $\angle B'NA + \angle ANB + \angle BNA' = (30^\circ + \beta) + 60^\circ + (30^\circ + \alpha) = 120^\circ + (\alpha + \beta) = 180^\circ$. Итак, точка N лежит на прямой $A'B'$.

Пусть T — середина меньшей дуги NC окружности Ω. Заметим, что $\angle ANT = \angle ABT = (\angle ABN + \angle ABC)/2 = 30^\circ + \beta = \angle ANB'$. Значит, точка T также лежит на прямой $A'B'$, и треугольник CDE совпадает с треугольником CNT. Этот треугольник равнобедренный, поскольку $NT = TC$.

9.8. Каждая клетка доски 100×100 окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата 2×2. Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке. *(М. Антипов)*

Решение. Предположим противное: на доске нет ни одноцветных, ни шахматно окрашенных квадратов 2×2. Рассмотрим все отрезки сетки, разделяющие две разноцветных клетки (назовём их *разделителями*); пусть их количество равно N.

В любом квадрате 2×2 есть либо ровно одна клетка одного из цветов и три клетки другого, либо две соседних белых клетки и две соседних чёрных. В обоих случаях внутри квадрата есть ровно два разделителя. Всего квадратов 2×2 имеется 99^2, а каждый разделитель лежит внутри ровно двух из них (поскольку к границе разделители не примыкают). Значит, $N = 2 \cdot (99^2)/2 = 99^2$.

С другой стороны, N должно быть чётным. Действительно, в каждой строке и каждом столбце первая и последняя клетка — чёрные; поэтому там должно быть чётное число перемен цвета. Противоречие.

Замечание 1. Вместо подсчёта количества разделителей можно считать количество разноцветных «доминошек» (прямоугольников 1×2) — это то же самое количество, либо же количество одноцветных «доминошек» — оно равно $2 \cdot 100 \cdot 99 - N$.

Замечание 2. Чётность общего количества разделителей можно доказать разными методами. Например, можно заметить, что если все внутренние клетки белые, то число разделителей равно $4 \cdot 98$, а при любой перекраске внутренней клетки оно может измениться только на чётную величину.

Можно также заметить, что все разделители разбиваются на несколько замкнутых ломаных (в рассматриваемом случае через каждый внутренний узел проходит ровно два разделителя, так что эти ломаные даже не имеют общих вершин), а в каждой замкнутой ломаной из отрезков сетки их количество чётно (поскольку чётны количества горизонтальных и вертикальных отрезков).