10 класс

Второй день

10.5. На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа n, увеличенные на 1. Найдите все такие числа n, для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа m. (*Собственными делителями* натурального числа $a > 1$ называются все его натуральные делители, отличные от a и от 1.)

10.6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника.

10.7. Каждая клетка доски 100×100 окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата 2×2. Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке.

10.8. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Точка B', симметричная точке B относительно прямой OI, лежит внутри угла ABI. Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника $BB'I$, проведенные в точках B' и I, пересекаются на прямой AC.