Условия и решения задач

9 класс

9.1. В произведении трёх натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2016? *(Н. Агаханов, И. Богданов)*

Ответ. Да, могло.

Решение. В качестве примера подходит произведение $1 \cdot 1 \cdot 676$. После указанной операции получается $(-2) \cdot (-2) \cdot 673 = 2692 = 676 + 2016$.

Замечание. Приведённый пример — единственный. Укажем, как его придумать. Предположим, что два из сомножителей равнялись 1, а третий — a. Их произведение было равно a, а после уменьшения превратилось в $(-2)^2(a-3) = 4a - 12$. Значит, при $4a - 12 = a + 2016$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 676$.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Предъявлен набор чисел, удовлетворяющий условию — 7 баллов.

Во в целом правильном решении из-за арифметической ошибки получен в качестве ответа набор 1, 1, a, где значение a ошибочно — 5 баллов.

9.2. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть? *(И. Богданов)*

Ответ. За 2 хода.

Решение. Покажем сначала, как Пете выиграть за 2 хода. Первым ходом он выставит 8 ладей по диагонали доски. Если он ещё не выиграл, то на диагонали есть нечётное число заду-

манных Васей клеток. В частности, на ней есть как клетка A, задуманная Васей, так и клетка B, не задуманная им.

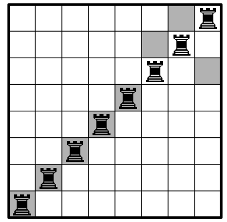

Рис. 1

Пусть на втором ходу Петя поставит ладьи на 6 диагональных клеток, кроме A и B, а также на клетки C и D, лежащие в тех же строках, что A и B соответственно, и в тех же столбцах, что B и A соответственно. Каждая новая ладья стоит или в одной строке, или в одном столбце с A, то есть их клетки Вася задумать не мог. Значит, в новой конфигурации ладей количество клеток, задуманных Васей, уменьшилось ровно на одну, то есть стало чётным, и Петя выиграл.

Осталось показать, что Петя не может гарантированно выиграть за один ход. Пусть у него это получилось. Переставив столбцы доски, можно считать, что он сделал первый ход так, как показано на рис. 1; тогда он не выиграет, если Васины клетки — отмеченные серым на том же рисунке.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Доказано только, что за один ход Петя не может выиграть — 1 балл.

Доказано только, что за два хода Петя может гарантированно выиграть — 6 баллов.

Приведён верный алгоритм, позволяющий Пете гарантированно выиграть за 2 хода (возможно, без обоснования и без доказательства невозможности гарантированного выигрыша за 1 ход) — не менее 4 баллов.

9.3. Существует ли треугольник со сторонами x, y и z такой, что $x^3 + y^3 + z^3 = (x+y)(y+z)(z+x)$? *(В. Сендеров)*

Ответ. Нет, не существует.

Первое решение. Пусть такой треугольник существует. Можно считать, что $x \geqslant y \geqslant z$. Тогда по неравенству треугольника $y + z > x$, откуда

$$(x+y)(x+z)(y+z) > (x+y)(x+z)x = x^3 + x^2y + x^2z + xyz > \\ > x^3 + x^2y + x^2z \geqslant x^3 + y^3 + z^3.$$

Противоречие.

Замечание. В подобном решении можно обойтись и без упорядочения переменных. Именно,

$$(x+y)(x+z)(y+z) = x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) + 2xyz > \\ > x^2 \cdot x + y^2 \cdot y + z^2 \cdot z + 0$$

по неравенству треугольника.

Второе решение. Пусть такой треугольник существует. Отметим точки касания его сторон со вписанной окружностью. Пусть отрезки касательных от вершин до этих точек точек касания равны a, b и c, тогда $x = b+c$, $y = a+c$ и $z = a+b$. Имеем

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (a+2b+c)(a+b+2c)(2a+b+c) = \\ = 2(a^3+b^3+c^3) + 7(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2) + 16abc$$

и

$$x^3+y^3+z^3 = (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3 = \\ = 2(a^3+b^3+c^3) + 3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2).$$

Значит, разность $(x+y)(y+z)(z+x) - x^3 - y^3 - z^3$ после подстановки и приведения подобных слагаемых приобретает вид $4(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+16abc$, что, очевидно, больше 0. Противоречие.

Замечание. Существуют три положительных числа x, y, z такие, что равенство из условия выполнено — например, 1, 1, $1+\sqrt{5}$. Таким образом, условие, что x, y, z являются длинами сторон треугольника, существенно.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Решения, содержащие существенные арифметические ошибки (например, неверные коэффициенты после раскрытия скобок во втором решении, приведённом выше), оцениваются не более, чем в 3 балла.

9.4. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ касается ω. Окружность Ω_b с центром P проходит через B, а окружность Ω_c с центром Q проходит через C. Докажите, что окружности Ω, Ω_b и Ω_c имеют общую точку. *(А. Акопян, П. Кожевников)*

Первое решение. Пусть O — центр треугольника ABC, и пусть ω касается отрезков BQ, QP и PC в точках K, L и M

соответственно (см. рис. 2). В силу симметрии равностороннего треугольника прямые BO и CO проходят через точки M и K соответственно.

Отложим на луче LO отрезок OX, равный OA (так что X лежит на окружности Ω). Поскольку PL и PM — касательные к ω, имеем $\angle POL = \angle POM$, а значит, $\angle POB = \angle POX$. Тогда треугольники POB и POX равны по двум сторонам ($OB = OX$, сторона OP — общая) и углу между ними. Итак, $PX = PB$, то есть точка X лежит на окружности Ω_b. Аналогично, X лежит и на окружности Ω_c.

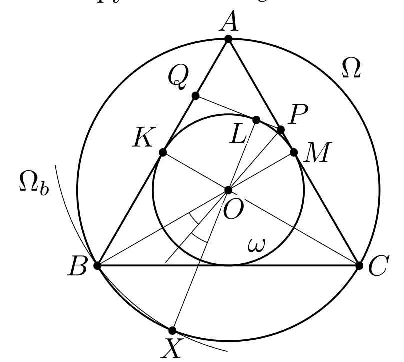

Рис. 2

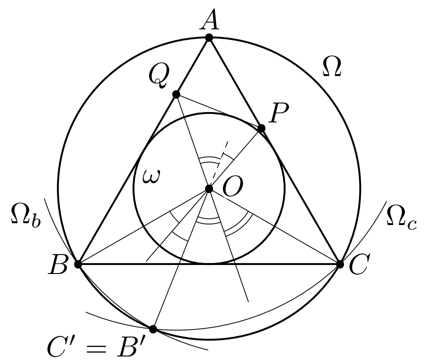

Рис. 3

Второе решение. Пусть O — центр треугольника ABC. Окружности Ω и Ω_b пересекаются в точке B. Вторая точка их пересечения — обозначим её через B' — симметрична точке B относительно линии центров PO (см. рис. 3). Аналогично, вторая точка пересечения окружностей Ω и Ω_c — это точка C', симметричная точке C относительно QO.

Мы докажем, что $B' = C'$ (тогда эта точка и будет общей у трёх окружностей). Имеем $OB' = OB = OC = OC'$; значит, достаточно понять, что $\angle BOB' + \angle COC' = \angle BOC (= 120^\circ)$. Поскольку прямые PO и QO — биссектрисы углов BOB' и COC', последнее равенство равносильно равенству $\angle POQ = 60^\circ$.

Это равенство нехитро проверяется. Так как $\angle A = 60^\circ$, то $\angle BQP + \angle CPQ = 240^\circ$, поэтому $\angle POQ = 180^\circ - (\angle OQP + \angle OPQ) = 180^\circ - (\angle BQP + \angle CPQ)/2 = 60^\circ$, что и требовалось.

Комментарий. Только за подсчёт некоторых углов без дальнейших продвижений (например, если доказано только, что $\angle POQ = 60^\circ$) баллы не ставятся.

Задача сведена к следующему утверждению (или эквивалентному ему): точка, симметричная B относительно PO, и точка, симметричная C относительно PO, совпадают — 3 балла.

Базовые факты про правильный треугольник (например, совпадение центров вписанной и описанной окружностей, его симметричность относительно биссектрис и т.п.) принимаются без доказательства.