ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2016–2017 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 10 КЛАСС

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (7 баллов) Точка *O* — центр квадрата *ABCD*. Найдите какие-нибудь семь попарно неравных векторов с концами и началами в точках *A, B, C, D, O*, сумма которых равна нулевому вектору. Объясните свой ответ.

Решение. Например, подойдёт цепочка $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

Критерии проверки.

- Приведён верный набор из семи векторов, либо доказано, что его сумма равна нулевому вектору, либо очевидно (исходя из обозначений векторов), что сумма равна нулевому вектору (например, так, как указано в ответе) — 7 баллов.
- Приведён верный набор из семи векторов, про который не доказано, что его сумма равна нулевому вектору, — 5 баллов.
- Приведён набор из шести векторов, удовлетворяющий остальным условиям задачи, — 2 балла.
- Приведён набор из семи векторов, но среди них есть одна пара равных векторов — 1 балл.
- Приведён набор векторов, сумма которых не равна нулевому вектору, — 0 баллов.

2. (7 баллов) Можно ли все натуральные числа от 1 до 800 разбить на пары так, чтобы сумма любой пары чисел делилась на 6?

Ответ. Нет.

Решение. Если требуемое в задаче возможно, то числа, кратные шести, должны разбиться на пары. Так как $800 = 133 \cdot 6 + 2$, чисел от 1 до 800, кратных шести, ровно 133. Противоречие: 133 числа нельзя разбить на пары.

Замечание. Среди чисел от 1 до 800 остаток 0 при делении на 6 дают 133 числа, остаток 1 — 134 числа, остаток 2 — 134 числа, остаток 3 — 133 числа, остаток 4 — 133 числа, остаток 5 — 133 числа. Следовательно, противоречие также можно получить иначе. Например, число, дающее остаток 1, должно быть в паре с числом, дающим остаток 5. Значит, таких чисел должно быть поровну, что не так.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верно подсчитано количество чисел с теми остатками, на которых основано получение противоречия, но ошибочно указано количество чисел с какими-то другими остатками — 5 баллов.
- Утверждается, что «не сойдутся остатки чисел», но не приводятся конкретные противоречия. Например, говорится, что чисел, кратных 6, нечётное количество, но не объясняется почему — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

3. (7 баллов) Участвуя в шахматном турнире, Вася сыграл 52 партии. По старой системе подсчёта очков (1 очко за победу, $\frac{1}{2}$ очка за ничью и 0 очков за поражение) он набрал 35 очков. Сколько очков он набрал по новой системе подсчёта очков (1 очко за победу, 0 очков за ничью и –1 очко за поражение)?

Ответ. 18 очков.

Решение.

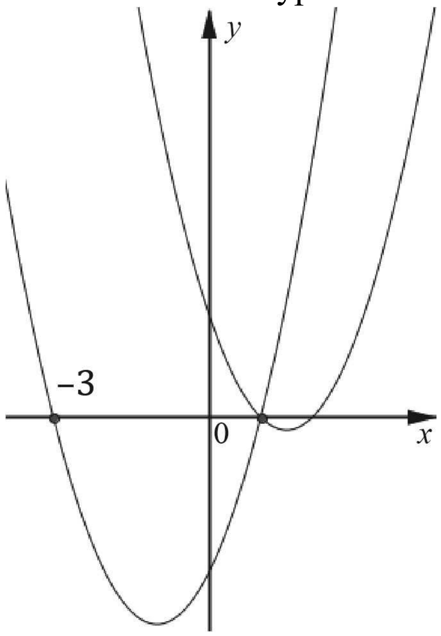
Первый способ. Пусть Вася в турнире a раз победил, b раз сыграл вничью и c раз проиграл. Тогда $a + b + c = 52$, $a + \frac{b}{2} = 35$. Нужно найти значение $a - c$. Из второго соотношения следует, что $b = 70 - 2a$. Тогда $a + (70 - 2a) + c = 52$, откуда $70 + c - a = 52$, $a - c = 18$.

Второй способ. При системе подсчёта $(1; \frac{1}{2}; 0)$ Вася набрал 35 очков, значит, при системе (2; 1; 0) он наберёт вдвое больше, то есть 70 очков.
При системе (1; 0; –1) Вася теряет по одному очку в каждой партии (по сравнению с системой (2; 1; 0)). Значит, он наберёт 70 – 52 = 18 очков.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верное рассуждение, в котором верный ответ не получен из-за арифметической ошибки, — 5 баллов.
- Рассмотрен частный случай, то есть конкретные значения числа побед, ничьих и поражений, удовлетворяющие условию задачи, и получен верный ответ — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

4. (7 баллов) На координатной плоскости изображены графики функций $y = x^2 + bx + c$ и $y = x^2 + cx + b$.
Найдите значения b и c. В ответе запишите уравнения каждой из функций.

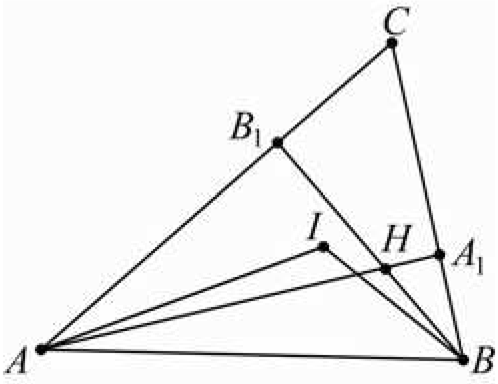


Ответ. $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = x^2 - 3x + 2$.

Решение. Некоторое число t является корнем обоих трёхчленов, поэтому $t^2 + bt + c = t^2 + ct + b$, откуда $(b - c)(t - 1) = 0$. Так как $b \neq c$ (иначе параболы совпадут), получаем, что $t = 1$. Если парабола $y = x^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в точках –3 и 1, то по теореме, обратной теореме Виета b = –(–3 + 1) = 2, c = –3 · 1 = –3.

Критерии проверки.
- Полное верное решение — 7 баллов.
- Приведён верный ответ, и показано, что он подходит (в частности, указана координата общей точки пересечения парабол с осью абсцисс), — 3 балла.
- Верно найден общий корень, но при нахождении коэффициентов получены неверные значения из-за арифметической ошибки — 2 балла.
- Приведён только верный ответ — 1 балл.

5. (7 баллов) Две вершины, центр вписанной окружности и точка пересечения высот остроугольного треугольника лежат на одной окружности. Найдите угол при третьей вершине.



Ответ. 60°.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором проведены высоты AA_1 и BB_1. Пусть точка H — точка пересечения высот, точка I — центр вписанной окружности.

1. Сумма углов четырёхугольника A_1HB_1C равна 360°. Получаем

$$\angle AHB = \angle A_1HB_1 = 360° - 90° - 90° - \angle C = 180° - \angle C.$$

2. По теореме о сумме углов треугольника имеем соотношения $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (для треугольника ABC) и $\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \angle AIB = 180°$ (для треугольника ABI). Отсюда

$$\angle AIB = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 180° - (180° - \angle C) : 2 \Rightarrow \angle AIB = 90° + \frac{\angle C}{2}.$$

3. Точки A, B, H и I лежат на одной окружности. Так как треугольник ABC остроугольный, точки H и I лежат по одну сторону от хорды AB, то есть вписанные углы AIB и AHB опираются на одну и ту же дугу. Значит,

$$\angle AIB = \angle AHB, \text{ откуда } 90° + \frac{\angle C}{2} = 180° - \angle C, \text{ а значит } \angle C = 60°.$$

Критерии проверки.

- Полное верное решение — 7 баллов.

Замечание. Если ученик ссылается на результаты пунктов 1 и 2 решения как на общеизвестные, то баллы не снижать.

- В целом верный ход решения, но упущено обоснование того, что углы AIB и AHB опираются на одну и ту же дугу (не использовано то, что треугольник остроугольный), — 5 баллов.
- В целом верный ход решения, но при решении уравнения $90° + \frac{\angle C}{2} = 180° - \angle C$ допущена ошибка и получен неверный ответ — 5 баллов.
- Приведены пункты 1 и 2 решения, но дальнейшего продвижения нет или оно ошибочно — 2 балла.
- Приведён только пункт 1 или только пункт 2 решения, но дальнейшего продвижения нет или оно ошибочно — 1 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

6. (7 баллов) Петя показал Васе 37 внешне одинаковых карточек, выложенных в ряд. Он сказал, что на закрытых сторонах карточек записаны все числа от 1 до 37 (каждое по одному разу) так, что число на любой карточке начиная со второй является делителем суммы чисел, написанных на всех предшествующих карточках. Затем Петя показал Васе, что на первой карточке написано число 37, а на второй — число 1. Вася сказал, что он тогда знает, какое число написано на третьей карточке. Какое?

Ответ. 2.

Решение. Сумма всех чисел, кроме последнего, делится на последнее число, значит, сумма всех чисел также делится на последнее число. Сумма всех чисел от 1 до 37 равна $19 \cdot 37$. Значит, последнее число равно 1, 19 или 37. Так как 1 и 37 стоят на первом и втором местах, последнее число — 19. Третье число — делитель числа $37 + 1 = 38$, то есть оно равно 1, 2 или 19. Мы знаем, что числа 1 и 19 расположены не на третьем месте, поэтому на третьем месте стоит число 2.

Замечание. Приводить пример, как расположены числа на остальных карточках (или доказывать его существование), не требуется.

Критерии проверки.

- Полное верное решение — 7 баллов.
- Утверждается, что на третьей карточке — число 2 или число 19, но других продвижений нет — 1 балл.

Максимальный балл за все выполненные задания — 42.