

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2016–2017 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 6 КЛАСС

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (7 баллов) Замените звёздочки цифрами так, чтобы равенство стало верным и все девять цифр были различными: $*** + ** = 1056$.

Возможные ответы.

$$984 + 72 = 1056$$

$$982 + 74 = 1056$$

$$974 + 82 = 1056$$

$$972 + 84 = 1056$$

Дополнительных объяснений не требуется.

Критерии проверки.

- Приведён любой из возможных ответов — 7 баллов.
- Приведён ответ, в котором какие-то две цифры совпадают, — 2 балла.

2. (7 баллов) С понедельника по среду гном ест на завтрак манную кашу, с четверга по субботу — рисовую кашу, а в воскресенье делает себе яичницу. По чётным числам месяца гном говорит правду, а по нечётным — неправду. В какие из первых десяти дней августа 2016 года он мог сказать: «Завтра я буду есть на завтрак манную кашу»? Обоснуйте ваш ответ.

Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота	Воскресенье
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10				

Ответ. Во вторник 2 августа, в среду 3 августа, в пятницу 5 августа, в понедельник 8 августа.

Решение. Если сегодня воскресенье, понедельник или вторник, то завтра гном ест манную кашу и фраза оказывается правдивой. Значит, в эти дни гном мог сказать указанную фразу только тогда, когда такой день приходится на чётное число. Таких дней два: вторник 2 августа и понедельник 8 августа. В остальные дни недели (со среды по субботу) фраза становится неверна, и гном мог её сказать, только если число было нечётным: в среду 3 августа и в пятницу 5 августа.

Возможно полное переборное решение, когда про каждый из 10 дней указано, мог ли гном в этот день сказать указанную фразу, и объяснено, почему мог или не мог.

Критерии проверки.

- Полное обоснованное решение — 7 баллов.
- В целом верное решение, проведены основные рассуждения, но один из дней в ответе не указан — 4 балла.
- Верный ответ с неполными рассуждениями — 2–3 балла.
- Только верный ответ — 1 балл.

3. (7 баллов) На доске написано число 20. За один ход разрешается либо удвоить число, либо стереть его последнюю цифру. Можно ли за несколько ходов получить число 25?

Ответ. Можно.

Решение. Число 25 можно получить, стерев последнюю цифру числа 256, которое является степенью двойки. Таким образом, необходимая цепочка преобразований может выглядеть так:

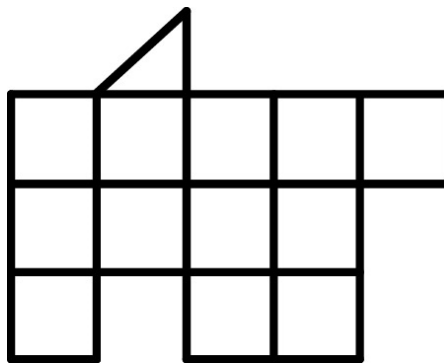
$$20 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 256 \rightarrow 25.$$

Существуют и другие решения.

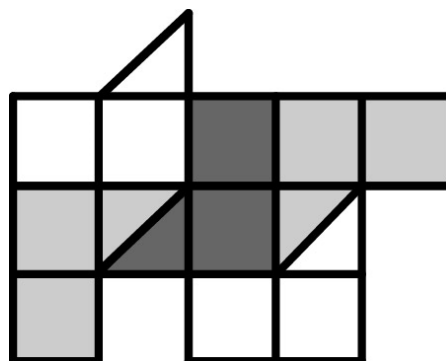
Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Неполное решение (например, указано, что 25 можно получить из числа 256, но не указано, как получить 256) — 3 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

4. (7 баллов) Покажите, как разрезать фигуру, изображённую на рисунке, на 5 равных фигур. (Фигуры называются равными, если их можно совместить при наложении. Фигуры можно переворачивать.)



Ответ.



Критерии проверки.

- Верный ответ — 7 баллов.

- Фигура разрезана на 5 фигур, каждая из которых состоит из двух квадратов и одного треугольника, но одна из диагоналей проведена неверно — 3 балла.
- Фигура разрезана на 5 фигур, каждая из которых состоит из двух квадратов и одного треугольника, но обе диагонали проведены неверно — 2 балла.

5. У бабушки три внука. Если внук заканчивал первый класс, то бабушка дарила ему одну книгу, если заканчивал второй класс, то бабушка дарила ему две книги, если третий класс, то три книги и т. д. Книги, полученные в подарок за все годы, внуки ставили на одну полку. Сейчас на полке 23 книги. Известно, что один из внуков старше остальных не меньше чем на два года. Какой класс он окончил?

Ответ. Шестой класс.

Решение. Из условия задачи следует, что если внук окончил второй класс, то на полке стоит $1 + 2 = 3$ его книги, если окончил третий класс, то $1 + 2 + 3 = 6$ его книг и т. д. Для удобства составим таблицу.

Какой класс окончил внук	1	2	3	4	5	6	7
Сколько его книг на полке	1	3	6	10	15	21	28

Очевидно, что ни один из внуков не мог окончить седьмой класс, так как тогда на полке было бы не меньше 28 книг. Так как на полке стоит 23 книги, нам нужно представить число 23 как сумму либо двух чисел второй строки таблицы (для случая, когда один из внуков еще не окончил первый класс), либо трёх таких чисел. После небольшого перебора получаем, что есть только два варианта такого представления: $23 = 3 + 10 + 10 = 1 + 1 + 21$. В первом случае один внук окончил второй класс и два внука окончили четвёртый класс. Это противоречит тому, что один из внуков старше остальных минимум на 2 года. Во втором случае два внука окончили первый класс и один внук окончил шестой класс, что удовлетворяет всем условиям задачи. Итак, старший внук окончил шестой класс.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- В целом верное решение с небольшими пробелами в обоснованиях — 5–6 баллов.
- Получен верный ответ, но случай, когда на полке 3 книги младшего внука и по 10 книг у каждого из двух других внуков, не рассмотрен и условие про самого старшего внука не использовано — 4 балла.
- Найдено, сколько книг у внука, если он закончил второй, третий и т. д. класс, но дальше продвижений нет — 1 балл.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

Максимальный балл за все выполненные задания — 35.