11 класс

11.1. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси. (*К. Сухов*)

Первое решение. Так как многочлен $P(P(x))$ монотонен, то он обязан иметь нечётную степень, а тогда он принимает все вещественные значения.

Пусть $a > b$, тогда найдутся такие числа x_a и x_b, что $P(P(x_a)) = a$, $P(P(x_b)) = b$. Так как старший коэффициент многочлена $P(P(x))$ всегда положителен, то этот многочлен возрастает, поэтому $x_a > x_b$.

Если старший коэффициент многочлена $P(x)$ положителен, то многочлен $P(P(P(x)))$ возрастает; отсюда получаем, что $P(P(P(x_a))) > P(P(P(x_b)))$, то есть $P(a) > P(b)$ для любых $a > b$. Если же старший коэффициент отрицателен, то, аналогично, $P(P(P(x_a))) < P(P(P(x_b)))$, откуда $P(a) < P(b)$ для любых $a > b$.

Второе решение. Предположим, что многочлен $P(x)$ не является монотонным. Тогда найдутся такие $a \neq b$, что $P(a) = P(b)$, а значит, и $P(P(a)) = P(P(b))$, то есть $P(P(x))$ не монотонен.

11.2. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $n \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \ldots + \frac{1+x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}x_n} + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n.$$

(*Ф. Петров*)

Решение. Во всех решениях мы считаем, что нумерация переменных циклическая, то есть $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ и т. д.

Первое решение. Заметим, что при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ верно неравенство $(1 + x_i^2)(1 + x_{i+1}^2) \geqslant (1 + x_ix_{i+1})^2$, так как

$$(1 + x_i^2)(1 + x_{i+1}^2) - (1 + x_ix_{i+1})^2 = (x_i - x_{i+1})^2 \geqslant 0.$$

Перемножая все такие неравенства, получим

$$(1+x_1^2)^2(1+x_2^2)^2 \ldots (1+x_n^2)^2 \geqslant (1+x_1x_2)^2(1+x_2x_3)^2 \ldots (1+x_nx_1)^2,$$

или

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}\cdot\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}\geqslant 1.$$

Для доказательства исходного неравенства теперь достаточно применить неравенство о средних арифметическом и геометрическом:

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}+\ldots+\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}\geqslant$$
$$\geqslant n\sqrt[n]{\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}\cdot\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}}\geqslant n.$$

Второе решение. Индукция по $n\geqslant 2$. В базовом случае $n=2$ неравенство

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_1x_2}\geqslant 2$$

после домножения на знаменатель и преобразования равносильно неравенству $x_1^2+x_2^2\geqslant 2x_1x_2$.

Для перехода от n к $n+1$ выясним, при каком условии на числа x_i, x_{i+1} и x_{i+2} верно неравенство

$$\frac{1+x_i^2}{1+x_ix_{i+1}}+\frac{1+x_{i+1}^2}{1+x_{i+1}x_{i+2}}\geqslant 1+\frac{1+x_i^2}{1+x_ix_{i+2}};\qquad (*)$$

заметим, что это неравенство даёт возможность выбросить x_{i+1} из имеющегося ряда чисел и сделать переход индукции.

Переобозначим для удобства $x_i=a$, $x_{i+1}=b$, $x_{i+2}=c$ и перенесем все члены в одну часть:

$$\frac{1+a^2}{1+ab}+\frac{1+b^2}{1+bc}-1-\frac{1+a^2}{1+ac}=(1+a^2)\,\frac{a(c-b)}{(1+ab)(1+ac)}+\frac{b(b-c)}{1+bc}=$$
$$=(c-b)\,\frac{a(1+a^2)(1+bc)-b(1+ab)(1+ac)}{(1+ab)(1+ac)(1+bc)}=$$
$$=\frac{(c-b)(a-b)(1+a(a+b)+a^2bc)}{(1+ab)(1+ac)(1+bc)}.$$

Отсюда видно, что при $b\geqslant a$ и $b\geqslant c$ неравенство $(*)$ выполнено. В частности, оно выполнено, если выбрать индекс i так, чтобы x_{i+1} было наибольшим среди $x_1,\ldots,x_n$; это завершает переход индукции.

Третье решение. Оценим каждое слагаемое по отдельности.

Зафиксируем положительное a и рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1+a^2}{1+ax} - 1 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+a^2), \qquad x > 0.$$

Её производная равна

$$f'(x) = -\frac{a(1+a^2)}{(1+ax)^2} + \frac{x}{1+x^2} = \frac{x(1+ax)^2 - a(1+a^2)(1+x^2)}{(1+x^2)(1+ax)^2}.$$

Преобразуем числитель полученной дроби:

$x+2ax^2+a^2x^3-a-a^3-ax^2-a^3x^2 = (x-a)(1+a(a+x)+a^2x^2)$.

Таким образом, $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x=a$; значит, $f(x) \geqslant f(a) = 0$ при всех $x > 0$.

Из доказанного следует, что

$$\frac{1+x_i^2}{1+x_ix_{i+1}} \geqslant 1 + \frac{\ln(1+x_i^2) - \ln(1+x_{i+1}^2)}{2}.$$

Сложив все n таких неравенств, получим требуемое.

11.3. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём *крестом* клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться? (*Г. Челноков*)

Ответ. $N = \left[\frac{k+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{k+2}{2}\right] = \begin{cases} m(m+1), & \text{если } k=2m; \\ m^2, & \text{если } k = 2m-1 \end{cases}.$

Решение. Обозначим через $N(k)$ ответ в задаче; положим $f(k) = \left[\frac{k+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{k+2}{2}\right]$. Докажем сначала, что

$$N(k) \geqslant N(k-1) + \left[\frac{k+1}{2}\right] \quad \text{при } k \geqslant 2. \qquad (*)$$

После отмечания исходных $N(k)$ клеток можно отметить хотя бы одну клетку A; это значит, что либо в столбце, либо в строке этой клетки уже отмечено $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ других клеток — пусть для определённости в строке ℓ.

Мысленно отметим все клетки строки ℓ. Ясно, что любую клетку по-прежнему можно отметить. Удалим из клетчатой плоскости строку ℓ и сдвинем вместе две получившиеся полуплоскости так, чтобы снова получилась клетчатая плоскость. Теперь мы можем отметить любую клетку этой новой плоскости, отмечая на каждом шагу клетку, в кресте которой уже есть не менее $k-1$ отмеченных клеток (поскольку из этого креста удалена одна клетка строки ℓ). Следовательно, изначально на этой плоскости должно было быть отмечено не менее $N(k-1)$ клеток. Значит, на исходной плоскости сначала должно быть хотя бы $N(k-1)$ отмеченных клеток не из ℓ; отсюда и следует $(*)$.

Поскольку $N(1) = 1$, из доказанного неравенства $(*)$ следует, что

$$N(k) \geqslant \underbrace{1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + \ldots}_{k \text{ слагаемых}} = f(k).$$

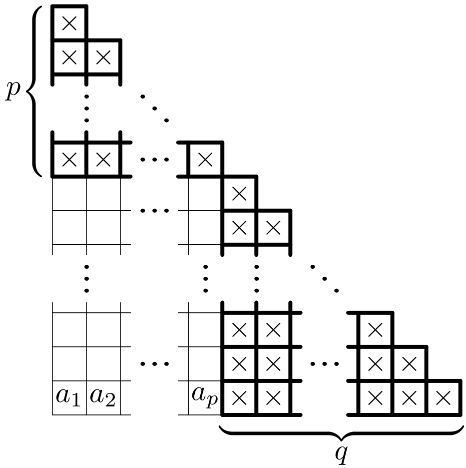

Рис. 16

Осталось показать, как отметить $f(k)$ клеток так, чтобы затем можно было отметить любую другую клетку плоскости. Покажем по индукции, что подходит пример, показанный на рис. 16, состоящий из двух «лесенок» высот $p = \left[\frac{k}{2}\right]$ и $q = \left[\frac{k+1}{2}\right]$; нетрудно понять, что в нём как раз $f(k)$ клеток. При $k = 1$ утверждение очевидно: при одной отмеченной клетке можно отметить любую клетку в её кресте, а затем и любую клетку вообще.

Для перехода индукции заметим, что можно последовательно отметить клетки $a_1, a_2, \ldots, a_p$. После этого в строке, в которой они стоят, окажется $p+q=k$ клеток, и в ней уже можно будет отметить любую клетку. Значит, можно, вычеркнув эту строку, уменьшить значение k на 1 и применить предположение индукции в оставшейся плоскости.

11.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC, касается окружности ω.

(*А. Кузнецов*)

Первое решение. Случай $AB=AC$ следует из симметрии; без ограничения общности будем считать, что $AC>AB$.

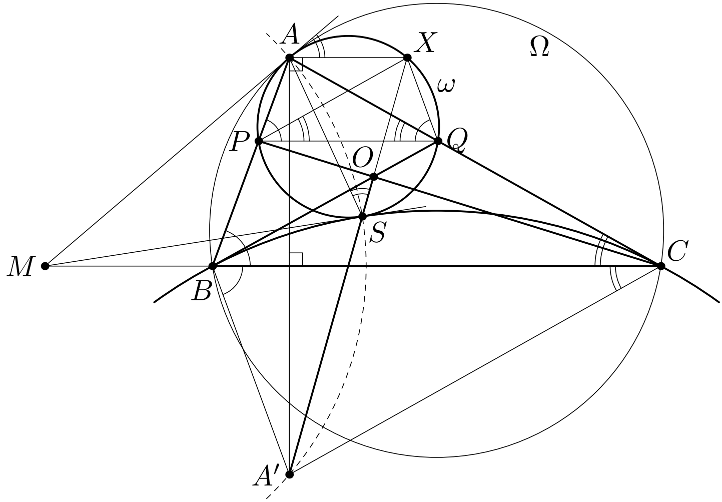

Рис. 17

Выберем на ω точку X так, что $PAXQ$ — равнобокая трапеция. Тогда $\angle XQP=\angle APQ=\angle ABC=\angle CBA'$ и, аналогично, $\angle XPQ=\angle BCA'$. Значит, $XQ \parallel BA'$ и $XP \parallel CA'$. Поэтому гомотетия с центром O, переводящая отрезок PQ в CB, переводит треугольник XPQ в $A'CB$; следовательно, точка O (а потому и точка S) лежит на $A'X$.

Пусть M — центр окружности, описанной около треугольника ASA'. Тогда $\angle MAA'=90^\circ-\angle ASX$. Поскольку $XA \parallel BC \perp$

$\perp AA'$, получаем $\angle MAX = \angle MAA' + 90^\circ = 180^\circ - \angle ASX$, то есть MA касается ω в точке A. Так как $MA = MS$, то MS также касается ω.

Пусть Ω — окружность, описанная около треугольника ABC; тогда ω и Ω гомотетичны с центром в A, поскольку $PQ \parallel BC$. Значит, MA также является касательной к Ω. Кроме того, M лежит на серединном перпендикуляре BC к отрезку AA'; поэтому $MA^2 = MB \cdot MC$. Итак, $MS^2 = MA^2 = MB \cdot MC$, то есть MS касается описанной окружности треугольника BSC и ω в точке S. Отсюда и следует требуемое.

Второе решение. Как и в первом решении, введём точку X и покажем, что S лежит на $A'X$.

Поскольку треугольник $A'XA$ прямоугольный, центр T его описанной окружности является серединой гипотенузы XA'. Точка T лежит на BC (как на серединном перпендикуляре к AA'). Кроме того, она лежит на серединном перпендикуляре к AX — а значит, и к PQ. Итак, $TP = TQ$. Обозначим $\angle TPQ = \angle TQP = \alpha$.

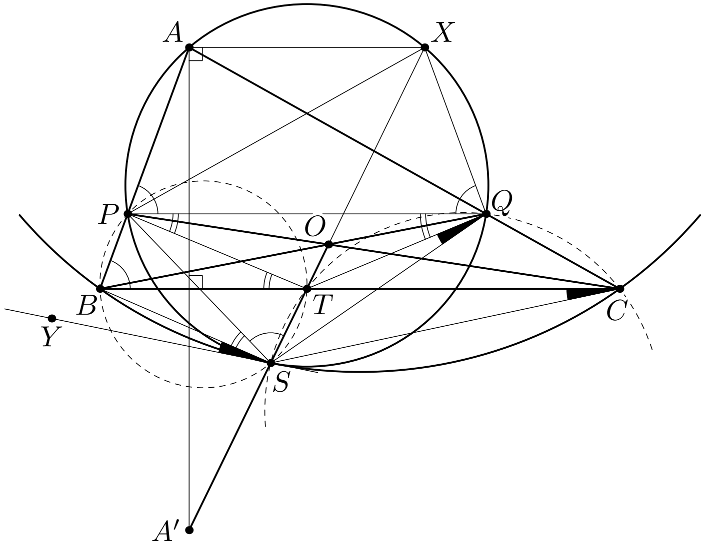

Рис. 18

Заметим, что $\angle XSP = \angle XQP = \angle APQ = \angle PBT$, поэтому точки P, S, T и B лежат на одной окружности. Аналогично, точки Q, S, T и C лежат на одной окружности. Тогда $\angle PSB = \angle PTB = \angle TPQ = \alpha$ и $\angle SCB = \angle SQT = |\alpha - \angle PQS|$. Пусть Y — точка на касательной в точке S к окружности ω, лежащая по ту же сторону от $A'X$, что и A. Тогда $\angle PSY = \angle PQS$ и, следовательно, $\angle BSY = |\alpha - \angle PSY| = |\alpha - \angle PQS| = \angle SCB$. Таким образом, окружность, описанная около треугольника BCS, касается прямой SY в точке S. Тогда она касается и окружности ω, что и требовалось.

11.5. На столе по кругу разложены 1000 карточек, на каждой написано по натуральному числу; все эти числа различны. Сначала Вася выбирает одну из карточек и снимает её со стола. Далее он повторяет следующую операцию. Если на последней снятой карточке было написано число k, то Вася отсчитывает от неё по часовой стрелке k-ую не снятую со стола карточку и тоже снимает её. Это происходит до тех пор, пока на столе не останется одна карточка. Могло ли оказаться, что в начальном расположении есть такая карточка A, что если снять первой любую другую карточку, то в конце останется обязательно карточка A?

(*О. Подлипский*)

Ответ. Могло.

Решение. Временно откажемся от условия различности чисел на карточках. Пусть A и B — две соседние карточки (A лежит после B по часовой стрелке). Напишем на карточке A произвольное число, на карточке B — число 2, а на всех остальных карточках — единицы. Если Вася снимет первой какую-либо карточку, отличную от A, то дальше он будет снимать карточки подряд по часовой стрелке, «перескочив» через A (так как на B написана двойка). Значит, A останется последней.

Осталось сделать числа на карточках попарно различными. Для этого достаточно ко всем числам на карточках прибавить различные натуральные числа, делящиеся на 1000!. Действительно, если при выкидывании карточки x на столе остаётся d карточек, то результат процесса не изменится, если к x прибавить число, кратное d (Вася просто отсчитает несколько дополнительных полных кругов). Значит, если к числу на карточке прибавить число, делящееся на 1000!, то результат процесса не изменится при любом выборе изначально выбранной карточки.

11.6. Три диагонали правильной n-угольной призмы пересекаются в одной внутренней точке O. Докажите, что точка O — центр призмы. (*Диагональ* призмы — это отрезок, соединяющий две её вершины, не находящиеся в одной грани.) (*М. Дидин*)

Первое решение. Пусть диагонали AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O, причём вершины A, B и C лежат на одном основании призмы, а вершины A_1, B_1 и C_1 — на противоположной (см. рис. 19). Тогда точки A, A_1, B и B_1 лежат в одной плоскости α, пересекающей параллельные основания призмы по параллельным отрезкам AB и A_1B_1. Аналогично, $AC \parallel A_1C_1$ и $BC \parallel B_1C_1$. Тогда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по двум углам. Поскольку их описанные окружности равны, эти треугольники также равны.

Впишем призму в сферу S. Плоскость α пересекает сферу S по окружности, на которой лежат точки A, B, A_1 и B_1. Поскольку AB и A_1B_1 параллельны и равны, ABA_1B_1 — прямоугольник, а O — его центр, откуда $OA = OB = OA_1 = OB_1$. Аналогично, $OA = OC = OA_1 = OC_1$. Значит, O — центр сферы S, а следовательно, и центр призмы.

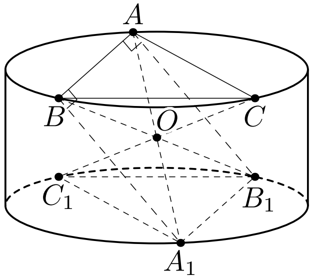

Рис. 19

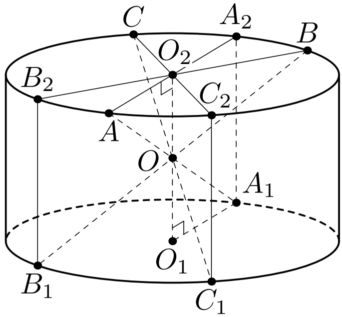

Рис. 20

Второе решение. Введём те же обозначения, что и в начале предыдущего решения. Обозначим проекции точек A_1, B_1, C_1 и O на плоскость ABC через A_2, B_2, C_2 и O_2 соответственно; пусть также O_1 — проекция точки O на плоскость $A_1B_1C_1$ (см. рис. 20). Прямоугольные треугольники AOO_2 и A_1OO_1 подобны по острому углу. Тогда, поскольку $O_2A_2 = O_1A_1$, имеем $\frac{AO_2}{O_2A_2} = \frac{AO_2}{O_1A_1} = \frac{OO_2}{OO_1}$. Аналогично, $\frac{AO_2}{O_2A_2} = \frac{BO_2}{O_2B_2} = \frac{CO_2}{O_2C_2} =$

$= \frac{OO_2}{OO_1}$. Поскольку точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на окружности ω, описанной около соответствующего основания, имеем $AO_2 \cdot O_2A_2 = BO_2 \cdot O_2B_2 = CO_2 \cdot O_2C_2$. Перемножив это равенство с предыдущим, получаем $AO_2 = BO_2 = CO_2$. Тогда O_2 — центр окружности ω, откуда $\frac{OO_2}{OO_1} = \frac{AO_2}{O_2A_2} = 1$. Итак, точка O — середина отрезка между центрами противоположных граней, то есть центр призмы.

Третье решение. Мы опять используем те же обозначения. Сделаем гомотетию с центром O, переводящую плоскость ABC в плоскость $A_1B_1C_1$. Тогда описанная окружность треугольника ABC перейдёт в описанную окружность треугольника $A_1B_1C_1$. Поскольку эти окружности равны, коэффициент гомотетии равен -1, а описанный около призмы цилиндр переходит в себя. Тогда O — центр этого цилиндра и, значит, совпадает с центром призмы.

11.7. Определим последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ формулой $a_n = \left[n^{\frac{2018}{2017}}\right]$. Докажите, что существует такое натуральное число N, что среди любых N подряд идущих членов последовательности есть такой, десятичная запись которого содержит цифру 5. (Как обычно, через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.) *(С. Кудря, И. Рубанов)*

Решение. Обозначим $\beta = \frac{1}{2017}$. Напомним, что частный случай неравенства Бернулли $(1+x)^{2017} \geqslant 1 + 2017x$ (при $x \geqslant -\beta$) можно переписать в виде $1+\beta y \geqslant (1+y)^{\beta}$ (при $y = 2017x \geqslant -1$).

Лемма 1. *Для любого натурального n верны неравенства* $\frac{n+1+\beta}{n+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta} \leqslant \frac{n+\beta}{n}$.

Доказательство. Правое неравенство сразу следует из упомянутого неравенства Бернулли. Для доказательства левого, применяя то же неравенство, получаем

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\beta} \leqslant 1 - \frac{\beta}{n+1} = \frac{n+1-\beta}{n+1},$$

откуда $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-\beta} \geqslant \frac{n+1}{n+1-\beta} \geqslant \frac{n+1+\beta}{n+1}$. □

Лемма 2. *Для любого натурального* n *верны неравенства* $n^\beta - 1 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant 2n^\beta + 1$.

Доказательство. Поскольку $n^{1+\beta} - 1 < a_n \leqslant n^{1+\beta}$, достаточно доказать, что $n^\beta \leqslant (n+1)^{1+\beta} - n^{1+\beta} \leqslant 2n^\beta$, или

$$1 \leqslant (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \leqslant 2. \qquad (*)$$

Применяя лемму 1, получаем

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \geqslant (n+1)\,\frac{n+1+\beta}{n+1} - n = 1+\beta > 1,$$

что доказывает левое неравенство. Аналогично, для правого имеем

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \leqslant \frac{(n+1)(n+\beta)}{n} - n = \frac{n(1+\beta)+\beta}{n} < 2. \ \square$$

Перейдём к решению задачи. Покажем, что число $N = 2^{2017} + 1000$ подходит. Для этого достаточно доказать, что при любом натуральном $n \geqslant 2^{2017}$ число с пятёркой в десятичной записи найдётся даже среди чисел $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+1000}$. Поскольку $n \geqslant 2^{2017}$, найдётся натуральное k такое, что $10^{k-1} \leqslant n^\beta/2 < 10^k$. Покажем, что даже среди $(k+2)$-х с конца цифр чисел $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+1000}$ встретится пятёрка, откуда и будет следовать требуемое.

По лемме 2, при каждом $d = n, n+1, \ldots, n+999$ имеем

$$a_{d+1} - a_d \leqslant 2d^\beta + 1 \leqslant 2\cdot(2n)^\beta + 1 < 4\cdot n^\beta + 1 < 9\cdot 10^k;$$

это означает, что $(k+2)$-я цифра при переходе от a_d к a_{d+1} либо не изменяется, либо увеличивается на 1 (при этом 9 переходит в 0).

С другой стороны, по той же лемме

$$a_{d+100} - a_d \geqslant 100(n^\beta - 1) \geqslant 2\cdot 10^{k+1} - 100 \geqslant 10^{k+1};$$

это означает, что за 100 таких переходов $(k+2)$-я цифра обязана хотя бы раз изменить своё значение (на следующее по циклу). Значит, за 1000 переходов она примет все 10 возможных значений, в частности, побывает и пятёркой.

11.8. Изначально в левом нижнем и правом нижнем углах доски 2018×2018 стоят два *скакуна* — красный и синий, соответственно. Коля и Саша ходят по очереди; начинает Коля. За ход игрок перемещает своего скакуна (Коля — красного, а Саша — синего), сдвигая его одновременно на 20 клеток по одной из координат и на 17 по другой; при этом скакун не может вставать на клетку, занятую другим скакуном. Запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре (позиции совпадают, если в них красный скакун стоит на одном и том же поле, и синий — тоже). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? (*И. Богданов, М. Дидин*)

Ответ. Саша.

Решение. Приведём стратегию, позволяющую Саше выиграть. Раскрасим всю доску шахматным образом. Обозначим через K и S поля, на которых исходно стоят красный (k) и синий (s) скакуны соответственно; эти поля разного цвета. Нетрудно понять, что от S до K можно дойти ходами скакуна; поскольку скакун каждый раз прыгает на клетку другого цвета, количество ходов в таком пути нечётно. Выберем один такой путь $S = S_1, K_1, S_2, K_2, \ldots, S_n, K_n = K$, в котором поля не повторяются. Позицию в игре будем обозначать парой (A, B), где A и B — поля, на которых стоят k и s соответственно.

Саша будет действовать следующим образом. Если s стоит на S_i, Саша всегда перемещает его на K_i. Если s стоит на K_i, то сашин ход зависит от положения k: если тот стоит на K, то Саша ходит на S_{i+1}, иначе — на S_i.

Заметим сразу, что количество позиций в игре конечно, так что игра рано или поздно закончится. Значит, если Саша всегда может сходить согласно стратегии, то рано или поздно не сможет сделать ход Коля. Осталось показать, что Саша всегда сможет так сходить. После хода Коли скакуны находятся на полях одного цвета, так что стратегия не может предписывать идти на поле, занятое k.

Пусть до некоторого момента Саша ходил согласно стратегии, и перед очередным его ходом s стоит на одном из полей S_i или K_i (а k — на некотором поле U). Опишем множество уже встречавшихся позиций, в которых s стоял на S_i или K_i. Впервые s появился на S_i в позиции (K, S_i) перед колиным ходом (возможно, это было начало игры). Затем после каждой пары ходов Коли и Саши были использованы (в некотором порядке) позиции (X, S_i) и (X, K_i) при некотором поле $X \neq K$.

Итак, если перед ходом Саши s стоит на S_i, а k — на поле U, то позиция (U, K_i) не встречалась раньше. Если s стоит на K_i, а k — на поле $U \neq K$, то позиция (U, S_i) также не встречалась раньше. Значит, в обоих случаях Саша может сделать ход согласно стратегии. Наконец, если s стоит на K_i, а k — на поле $U = K$, то $i < n$ (иначе скакуны бы стояли на одном поле), так что поле S_{i+1} существует, и s на нём ещё не был. Поэтому Саша может сходить туда. Доказательство окончено.