Условия и решения задач

9 класс

9.1. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \ldots$ простые. (*А. Голованов*)

Первое решение. Обозначим $c = a_1 - p_1 \geqslant 0$. По условию, при любом n имеем $a_n - a_1 = p_n - p_1$, или $a_n - p_n = a_1 - p_1 = c$.

Предположим, что $c > 0$. Найдётся индекс n такой, что $a_n > 2c$. Тогда $a_n > p_n = a_n - c > a_n - \frac{a_n}{2} = \frac{a_n}{2}$, то есть $2p_n > a_n > p_n$. Значит, a_n не делится на p_n; это противоречит условию.

Итак, $c = 0$ и, следовательно, $a_n = p_n$ — простое число при всех n.

Замечание. Доказать, что $c = 0$, можно и по-другому. Например, из равенства $c = a_n - p_n$ следует, что c делится на p_n при любом n. Но это невозможно, так как последовательность чисел $p_n = a_n - c$ строго возрастает.

Второе решение. Обозначим $b_n = a_n/p_n$; по условию, все b_n — натуральные числа.

Заметим, что $p_{n+1} - p_n = a_{n+1} - a_n > 0$. Далее, из того же равенства $p_{n+1} - p_n = a_{n+1} - a_n = b_{n+1}p_{n+1} - b_n p_n$ получаем

$$b_{n+1} = \frac{p_{n+1} - p_n + b_n p_n}{p_{n+1}} = 1 + (b_n - 1)\frac{p_n}{p_{n+1}}.$$

Отсюда следует, что $b_{n+1} = 1$ тогда и только тогда, когда $b_n = 1$. Кроме того, если $b_n > 1$, то $b_{n+1} < 1 + (b_n - 1) = b_n$.

Итак, если хотя бы один из членов последовательности $b_1, b_2, \ldots$ больше единицы, то эта последовательность строго убывает, пока не появится число b_n, равное 1. Но это невозможно, ибо тогда и $b_{n-1} = 1$. Значит, все члены этой последовательности равны 1, откуда $a_n = p_n$ — простое число.

9.2. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны

AB за точку B, а также касается ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный. (*И. Богданов*)

Первое решение. Из симметрии, прямая AL является биссектрисой угла $\angle BAC$ и проходит через центры окружностей ω и Ω.

Поскольку соответственные стороны треугольников KBL и MCL параллельны, существует гомотетия с центром L, переводящая первый треугольник во второй. Эта гомотетия переводит окружность ω с диаметром KL в окружность с диаметром LM, то есть в Ω. Отрезок AB, касающийся ω, перейдёт в параллельный ему отрезок CA', касающийся Ω; при этом, поскольку $\angle CA'A = \angle A'AB = \angle A'AC$, треугольник $A'CA$ равнобедренный (см. рис. 1).

Пусть O — центр Ω. Поскольку CA и CA' — касательные к Ω, то CO — биссектриса в равнобедренном треугольнике $A'CA$, а стало быть — и высота. Итак, медиана CO треугольника LCM является высотой, откуда и следует требуемое.

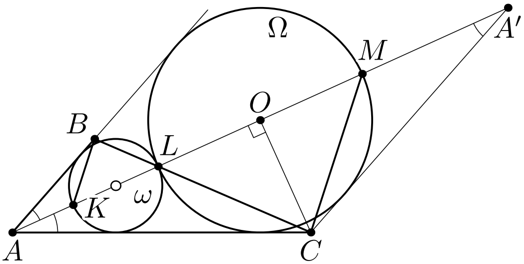

Рис. 1

Второе решение. Из симметрии, точка L лежит на биссектрисе угла BAC, поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$. Так как $KB \parallel CM$, по теореме Фалеса имеем $\frac{BL}{LC} = \frac{KL}{LM} = \frac{r}{R}$, где r и R — радиусы ω и Ω соответственно.

Обозначим через O и O' центры Ω и ω соответственно, а через X и X' — точки их касания с AC (см. рис. 2). Тогда прямоугольные треугольники AOX и $AO'X'$ подобны, поэтому $\frac{AO'}{r} = \frac{AO'}{O'X'} = \frac{AO}{OX} = \frac{AO}{R}$, а значит, и $\frac{AL}{r} = \frac{AO'+r}{r} =$

$= \dfrac{AO+R}{R} = \dfrac{AM}{R}$. Итак, $\dfrac{AL}{AM} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{AB}{AC}$; поэтому треугольники ABL и ACM подобны. Отсюда $\angle CML = \angle ALB = \angle CLM$, а значит, $CL = CM$.

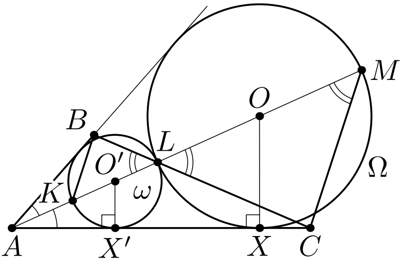

Рис. 2

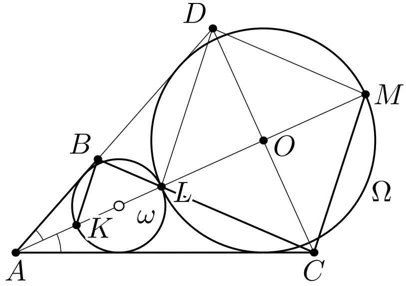

Рис. 3

Третье решение. Опять же заметим, что AL — биссектриса угла $\angle BAC$. Рассмотрим гомотетию с центром A, переводящую ω в Ω. Эта гомотетия переводит K в L, а L — в M. Пусть точка B переходит в точку D (см. рис. 3). Тогда $DM \parallel BL \parallel LC$ и $DL \parallel BK \parallel CM$; значит, $LCMD$ — параллелограмм, и его диагонали LM и CD пересекаются в их общей середине O (т. е. центре Ω).

С другой стороны, поскольку $\angle BAO = \angle CAO$, в треугольнике DAC медиана AO является биссектрисой — а, стало быть, и высотой. Значит, $CD \perp LM$, то есть параллелограмм $LCMD$ — ромб. Поэтому $LC = CM$.

9.3. Пусть $a_1, \ldots, a_{25}$ — целые неотрицательные числа, а k — наименьшее из них. Докажите, что

$$[\sqrt{a_1}\,] + [\sqrt{a_2}\,] + \ldots + [\sqrt{a_{25}}\,] \geqslant \left[\sqrt{a_1 + \ldots + a_{25} + 200k}\,\right].$$

(Как обычно, через $[x]$ обозначается целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

(С. Берлов, А. Храбров)

Решение. Положим $n_i = [\sqrt{a_i}\,]$. Тогда $a_i < (n_i+1)^2$, а поскольку числа a_i целые, имеем $a_i \leqslant n_i^2 + 2n_i$. Если мы теперь покажем, что

$$\sqrt{a_1 + \ldots + a_{25} + 200k} < n_1 + n_2 + \ldots + n_{25} + 1, \qquad (*)$$

то правая часть доказываемого неравенства не будет превосходить $n_1 + n_2 + \ldots + n_{25}$, что и требовалось.

Пусть для определённости $k = a_1$. Оценим подкоренное выражение в левой части $(*)$:

$$a_1 + \ldots + a_{25} + 200k \leqslant (n_1^2 + 2n_1) + \ldots + (n_{25}^2 + 2n_{25}) + 200k = \\ = (n_1^2 + \ldots + n_{25}^2) + 2(n_1 + \ldots + n_{25}) + 200(n_1^2 + 2n_1).$$

Квадрат правой части $(*)$ равен

$$(n_1^2+\ldots+n_{25}^2)+2(n_1n_2+n_1n_3+\ldots+n_{24}n_{25})+2(n_1+\ldots+n_{25})+1.$$

Сравнивая эти выражения, видим, что достаточно показать, что

$$100(n_1^2 + 2n_1) \leqslant n_1n_2 + n_1n_3 + \ldots + n_{24}n_{25}.$$

Но при любых $i < j$ верно неравенство $n_in_j \geqslant n_1^2 \geqslant n_1$. При этом в правой части стоит $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ слагаемых такого вида. Оценивая 100 из них числом n_1^2, а остальные 200 — числом n_1, получаем требуемое.

Замечание. В ключевом неравенстве $(*)$ разность между квадратами правой и левой частей может достигать единицы. Как следует из решения, это случается при $a_1 = a_2 = \ldots = a_{24} = 0$, а также при $a_1 = a_2 = \ldots = a_{25} = 3$.

9.4. На клетчатой доске $n \times n$ отметили несколько клеток таким образом, что левый нижний (L) и правый верхний (R) углы доски не отмечены, и любой путь коня из L в R обязательно содержит отмеченную клетку. При каких $n > 3$ можно заведомо утверждать, что найдутся три клетки, идущие подряд по диагонали, среди которых отмечено хотя бы две? (*С. Берлов, А. Сафиуллина*)

Ответ. При $n = 3k + 1$, где k — натуральное число.

Решение. Пронумеруем горизонтали числами $1, 2, \ldots, n$ снизу вверх, а вертикали — слева направо. Будем обозначать клетку через (a, b), где a и b — номера её вертикали и горизонтали соответственно.

Покажем сначала, что при $n = 3k$ и при $n = 3k + 2$ требуемые клетки найдутся не всегда. При $n = 3k$ можно отметить все клетки горизонталей, номера которых дают остаток 2 при делении на 3. Тогда нетрудно видеть, что конь, выйдя из L, сможет ходить лишь по клеткам, содержащим крестик на рис. 4, а значит — не сможет пройти в R. Аналогично, при $n = 3k + 2$ можно отметить все клетки горизонталей, номера которых делятся на 3 (см. рис. 5).

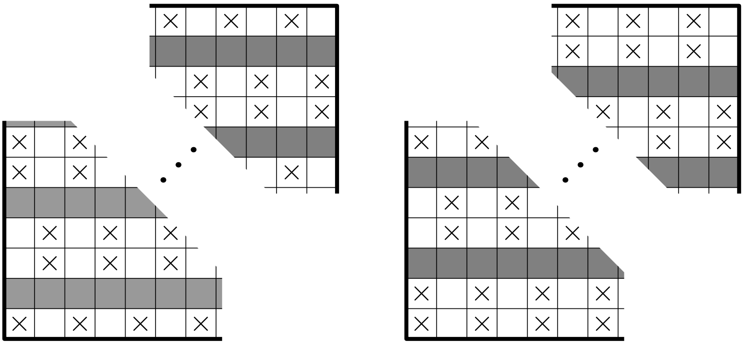

Рис. 4 Рис. 5

Осталось показать, что при $n = 3k + 1$ требуемые клетки обязательно найдутся. Докажем это индукцией по k. При $k = 1$ утверждение очевидно: если одна из клеток $(2, 3)$ и $(3, 2)$ не отмечена, то через неё конь сможет дойти до цели.

Для перехода предположим, что $k > 1$, и для меньших значений k утверждение уже доказано. Пусть среди любых трёх клеток, идущих по диагонали, отмечено не больше одной, но конь не может пройти из L в R. Для клетки (a, b) обозначим $(a', b') = (a + 3k - 3, b + 3k - 3)$. Тогда, если клетки (a, b) и (a', b') находятся на доске и не отмечены, то конь может пройти из (a, b) в (a', b') по предположению индукции.

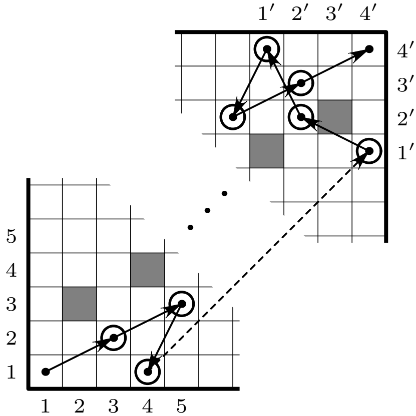

Рис. 6

Одна из клеток $(2, 3)$ и $(3, 2)$ не отмечена — пусть это $(3, 2)$. Если $(3', 2')$ не отмечена, то конь может пройти по маршруту $L \to (3,2) \dashrightarrow (3',2') \to R$, что невозможно. Значит, $(3',2')$ отмечена; по предположению, тогда $(2',3')$ не отмечена, а значит, $(2,3)$ должна быть отмечена по аналогичным причинам. Далее, клетка $(4,4)$ должна быть отмечена, иначе существует путь $L \to (3,2) \to (4,4) \dashrightarrow (4',4') = R$; аналогично, отмечена клетка $(1',1')$ (см. рис. 6).

Из предположения получаем, что клетки с кружками на рис. 6 не отмечены. Тогда, как мы видим, конь может пройти из L в $(4,1)$, оттуда (по предположению индукции) — в $(4',1')$, а оттуда в R. Это противоречие завершает переход индукции.

9.5. На окружности отмечено 99 точек, делящих эту окружность на 99 равных дуг. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Петя; своим первым ходом он окрашивает в красный или синий цвет любую отмеченную точку. Затем каждый из игроков своим ходом может окрасить в красный или синий цвет любую неокрашенную отмеченную точку, соседнюю с уже окрашенной. Вася выигрывает, если после окрашивания всех точек найдётся равносторонний треугольник, все три вершины которого окрашены, причём в один и тот же цвет. Может ли Петя ему помешать? (*С. Берлов*)

Ответ. Нет.

Решение. Приведём стратегию, позволяющую Васе гарантированно выиграть. Первые ходы он делает произвольно, пока перед его очередным ходом не будут окрашены 33 точки. Пусть A — одна из крайних окрашенных точек, а B — неокрашенная точка, соседняя с другой крайней. Тогда существует отмеченная точка C такая, что ABC — равносторонний треугольник.

На этом ходе Вася красит точку B в тот же цвет, что и A (без ограничения общности, красный). Далее он действует так. Если Петя красит точку, соседнюю с C, то Вася красит C в красный цвет и выигрывает, получив одноцветный треугольник ABC. Если же Петя красит точку, несоседнюю с C, то и Вася тоже красит несоседнюю с C. Если Вася сможет так действовать, то в результате точку C окрасит именно он и выиграет.

Предположим, что он не смог сходить согласно стратегии. Это значит, что Петя окрасил несоседнюю с C точку, а Вася не имеет такой возможности. Это значит, что остались неокрашенными ровно три точки: C и два её соседа. Но тогда окрашено 96 точек, и ход должен делать Петя. Полученное противоречие завершает решение.

9.6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число a^n+1 **не** делится на n^b+1. (*А. Голованов*)

Решение. Назовём натуральное n *плохим*, если a^n+1 не делится на n^b+1. Наша цель — доказать, что плохих чисел бесконечно много.

Первое решение. Докажем, что при любом чётном n одно из чисел n и n^3 плохое; из этого, очевидно, следует требуемое. Предположим противное. Тогда $a^n+1 \vdots n^b+1$ и $a^{n^3}+1 \vdots n^{3b}+1 \vdots n^b+1$. Иначе говоря, $a^n \equiv -1 \pmod{n^b+1}$ и $a^{n^3} \equiv -1 \pmod{n^b+1}$. Но отсюда следует, что $-1 \equiv a^{n^3} = (a^n)^{n^2} \equiv (-1)^{n^2} \equiv 1 \pmod{n^b+1}$; это невозможно, ибо $n^b+1>2$. Противоречие.

Замечание. Аналогичное решение можно получить, показав, что среди чисел вида 2^k при нечётных k не более одного неплохого. Действительно, если числа 2^k и 2^ℓ при нечётных $k<\ell$ неплохи, то $a^{2^k}+1 \vdots 2^{kb}+1 \vdots 2^b+1$ и, аналогично, $a^{2^\ell}+1 \vdots 2^b+1$. Это невозможно, ибо $a^{2^\ell} \equiv (a^{2^k})^{2^{\ell-k}} \equiv 1 \pmod{2^b+1}$.

Второе решение. При $a=1$ утверждение задачи очевидно, поэтому будем считать, что $a>1$.

Лемма. *Пусть $a>1$, m и n — натуральные числа. Предположим, что a^n+1 делится на a^m+1. Тогда n делится на m.*

Доказательство. Пусть r — остаток от деления n на m, $n-r=qm$. Тогда $0 \equiv a^n+1 = a^{qm+r}+1 \equiv (-1)^q a^r+1 = \pm a^r+1 \pmod{a^m+1}$, то есть одно из чисел $a^r \pm 1$ делится на a^m+1. Но это невозможно при $r \neq 0$, ибо $0 < a^r \pm 1 < a^m+1$. □

Докажем, что существует бесконечно много плохих чисел вида a^k. Действительно, если $a^{a^k}+1$ делится на $a^{kb}+1$, то по лемме a^k должно делиться на kb. Это невозможно, если, например, k — простое число, большее a. Осталось заметить, что таких простых чисел бесконечно много.

Третье решение. Мы опять же исследуем лишь случай $a > 1$.

Пусть p — некоторый простой делитель числа $(a(a-1))^b + 1$. Положим $n_i = a(a-1) + ip$; тогда при любом i имеем $n_i^b + 1 \equiv$ $\equiv (a(a-1))^b + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, то есть $n_i^b + 1$ делится на p.

С другой стороны, покажем, что числа $a^{n_i} + 1$ и $a^{n_{i+1}} + 1 =$ $= a^{n_i + p} + 1$ не могут одновременно делиться на p. Действительно, иначе на p делилась бы и их разность $a^{n_i}(a^p - 1)$; но это невозможно, ибо $a^p - 1 \equiv a - 1 \pmod{p}$ по малой теореме Ферма, а числа a и $a - 1$ взаимно просты с p.

Итак, либо $a^{n_i} + 1$ не делится на p (и, значит, на $n_i^b + 1$), либо $a^{n_{i+1}} + 1$ не делится на p (и, значит, на $n_{i+1}^b + 1$). Поэтому среди чисел $n_1, n_2, \ldots$ бесконечно много плохих.

9.7. В карточной игре каждой карте сопоставлено числовое значение от 1 до 100, причём каждая карта бьёт меньшую, за одним исключением: 1 бьёт 100. Игрок знает, что перед ним лежат рубашками вверх 100 карт с различными значениями. Крупье, знающий порядок этих карт, может про любую пару карт сообщить игроку, какая из них какую бьёт. Докажите, что крупье может сделать сто таких сообщений, чтобы после этого игрок смог точно узнать значение каждой карты.

(*И. Богданов, К. Кноп, Ю. Кузьменко*)

Решение. Обозначим через c_i карту значения i. Выберем произвольное число $3 \leqslant k \leqslant 98$. Пусть крупье сообщит, какая карта бьёт другую, в парах (c_k, c_1), (c_{100}, c_k), (c_1, c_{100}), а также во всех парах вида (c_{i+1}, c_i) при $i = 2, 3, \ldots, 98$. Всего он сделает 100 сообщений.

Покажем, что по этим данным игрок может восстановить значения всех карт. Он может рассуждать так. Из того, что карты c_{100}, c_k, c_1 бьют друг друга по циклу, следует, что одна из них имеет значение 1, а следующая по циклу — значение 100. Но, кроме карт этого цикла, карту c_k бьёт карта c_{k+1}, а карта c_k бьёт карту c_{k-1}. Значит, c_k не может иметь значение 1 или 100, то есть значения 1 и 100 имеют карты c_1 и c_{100} соответственно.

Наконец, среди оставшихся карт $c_2, c_3, \ldots, c_{99}$ в любой паре карта с бóльшим значением бьёт другую. Поскольку нам известно, что каждая c_{i+1} бьёт c_i при $i = 2, 3, \ldots, 98$, отсюда следует, что каждая c_i имеет значение i.

Замечание. Аналогичным образом, если в колоде $n > 4$ значений, крупье может сообщить игроку порядок n карт различных значений за n сообщений. При $n = 4$ результат остаётся верным, хотя метод, приведённый выше, не работает (а какой работает?).

9.8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны. (*Б. Обухов*)

Первое решение. Воспользуемся следующим фактом.

Лемма (теорема Монжа). *Выпуклый четырёхугольник $XYZT$ является вписанным тогда и только тогда, когда перпендикуляры, опущенные из середин его сторон на противоположные стороны четырёхугольника, имеют общую точку.*

Доказательство. Пусть P, Q, R и S — середины сторон XY, YZ, ZT и TX соответственно. Как известно, $PQRS$ — параллелограмм, поэтому отрезки PR и QS имеют общую середину T. Симметрия относительно T переводит перпендикуляры, опущенные из середин сторон на противоположные стороны, в серединные перпендикуляры к сторонам. Значит, первые имеют общую точку тогда и только тогда, когда вторые имеют общую точку, то есть когда $XYZT$ вписан. □

Перейдём к решению задачи. Выберем точки C' и A' так, что точки C и A — середины отрезков NC' и MA' соответственно (см. рис. 7). Поскольку $AD \parallel MN$ и $AD = MN/2$, отрезок AD является средней линией в треугольнике $A'MN$, то есть D — середина NA'.

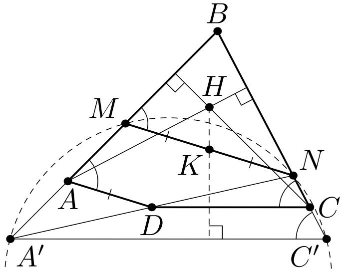

Рис. 7

Поскольку CD и AD — средние линии треугольников $NC'A'$ и $A'MN$, имеем $\angle NC'A' = \angle NCD = \angle MAD = 180^\circ - \angle A'MN$, то есть четырёхугольник $C'A'MN$ вписан. По лемме, из этого следует, что перпендикуляры из A на $C'N$, из C на MA' и из K

на $C'A'$ пересекаются в одной точке. Но первые два перпендикуляра пересекаются в точке H; значит, $KH \perp C'A' \parallel CD$, что и требовалось.

Второе решение. Достаточно показать, что точка H' пересечения высот треугольника CDK совпадает с H.

Поскольку $AMKD$ — параллелограмм, имеем $KD \parallel AB$, а так как $CH' \perp KD$, то $CH' \perp AB$. Остаётся показать, что $AH' \perp CN$.

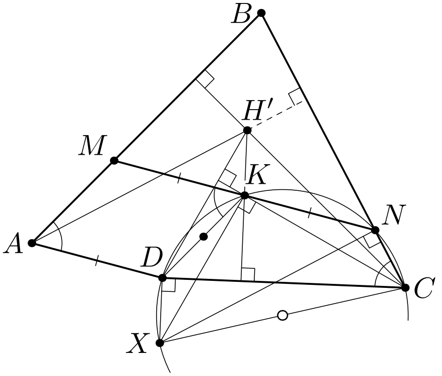

Рис. 8

Заметим, что $\angle DCN = \angle DAM = \angle DKM$, поэтому четырёхугольник $CNKD$ вписан в некоторую окружность. Пусть CX — диаметр этой окружности (см. рис. 8). Тогда $CK \perp KX$, значит, $KX \parallel DH'$. Аналогично, $DX \parallel KH'$, поэтому $KH'DX$ — параллелограмм. Значит, при центральной симметрии относительно середины отрезка DK точка H' переходит в X. Поскольку $AKND$ — тоже параллелограмм, при этой же симметрии точка N переходит в A. Отсюда $AH' \parallel XN$; поскольку $\angle XNC = 90^\circ$ (как опирающийся на диаметр), получаем $AH' \perp CN$.

Третье решение. Покажем, что K — точка пересечения высот треугольника CHD; отсюда будет следовать требуемое.

Как и в предыдущем решении, из параллелограмма $AMKD$ получаем, что $DK \parallel AB \perp CH$. Осталось доказать, что $CK \perp$ $\perp DH$.

Пусть прямая DK пересекает BC в точке V. Достроим треугольник BVD до параллелограмма $BVDU$; тогда точка U лежит на AB, поскольку $DK \parallel AB$. Соответственные стороны треугольников KVN и AUD параллельны, так что эти треугольники подобны; поскольку $AD = KN$, они равны. Значит, $AU = KV$.

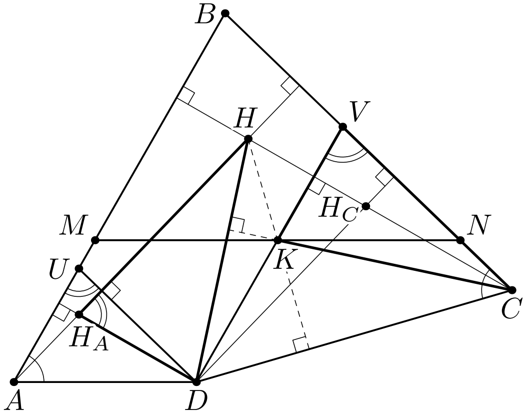

Рис. 9

По условию, $\angle UAD = \angle VCD$. Поскольку $BVDU$ — параллелограмм, имеем $\angle AUD = \angle CVD$. Значит, треугольники AUD и CVD подобны; поэтому $\frac{UD}{VD} = \frac{AU}{CV} = \frac{KV}{CV}$.

Пусть H_A и H_C — точки пересечения высот этих треугольников (см. рис. 9); тогда DH_AHH_C — параллелограмм. Из подобия имеем $\frac{DH_A}{DH_C} = \frac{DU}{DV}$. Итак, $\frac{DH_A}{HH_A} = \frac{DH_A}{DH_C} = \frac{DU}{DV} = \frac{KV}{CV}$ и $\angle DH_AH = \angle KVC$ (соответственные стороны этих углов перпендикулярны). Значит, треугольники DH_AH и KVC подобны; а тогда из упомянутой перпендикулярности следует, что и $DH \perp CK$.