Задача 10.1. Мыльные пузыри (И.Иоголевич)

Возможное решение

Часть 1.

Для получения зависимости V(t) будем надувать мыльные пузыри разного объема и измерять время их полного сдутия.

Для начала подготовим рабочее место. Чтобы пузыри дольше жили и имели форму полусферы, смочим пленку мыльным раствором. Чтобы не занимать руки, запустим секундомер и положим его на стол рядом с пленкой. Для надувания пузыря присоединим трубку к шприцу и наберем в шприц необходимый объем воздуха, затем обмакнем второй конец трубки в мыльный раствор. Выдувая весь воздух из шприца, сформируем на пленке пузырь. Дождавшись, когда секундомер будет показывать удобное для отсчета время, запомним его и быстро отсоединим шприц от трубки. Дождемся полного сдувания пузыря, глядя при этом и на пузырь, и на секундомер. Запишем разность показаний секундомера в момент исчезновения пузыря и в начальный момент. Измерения выполним с шагом в 5 мл и для каждого объема пузыря проведем повторный опыт, затем усредним время.

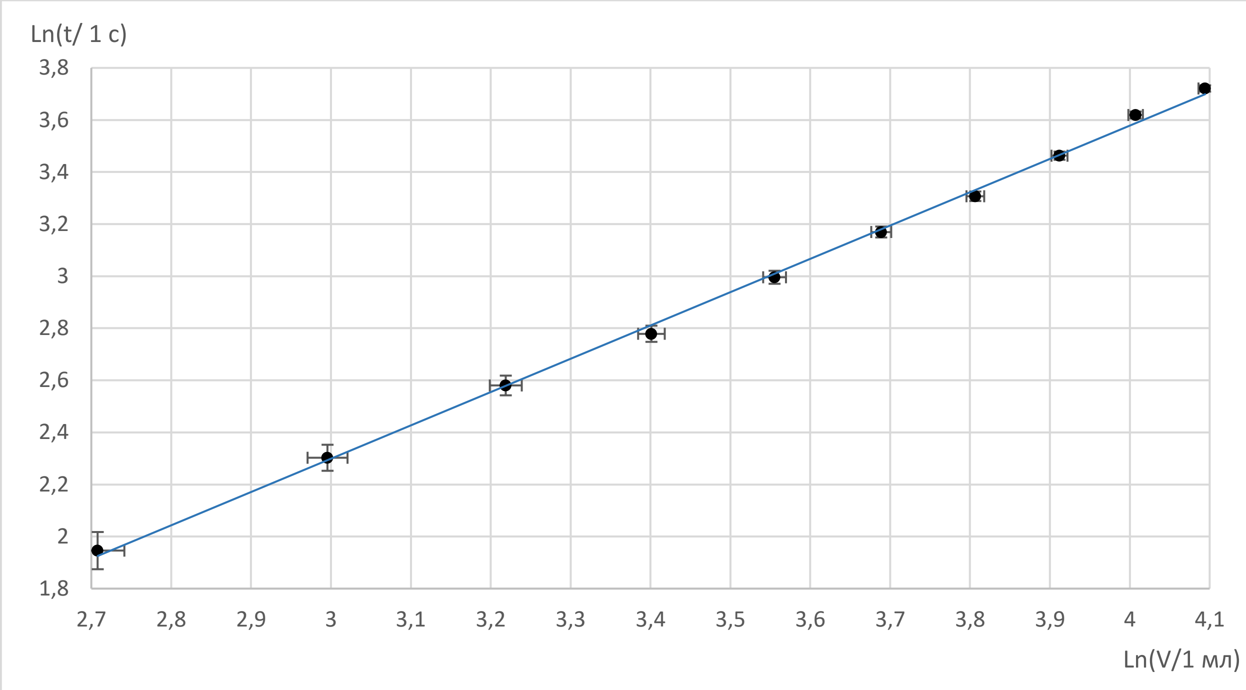
Заметим, что объем пузыря с большой точностью равен начальному объему воздуха в шприце, так как давление воздуха в пузыре отличается от атмосферного на единицы Паскалей. (Это можно подтвердить, получив значение σ в конце эксперимента).

№	V, мл	t_1, с	t_2, с	$t_{ср}$, с	ln(V/1 мл)	ln(t/1 с)
1	60	40,8	41,8	41,3	4,09	3,72
2	55	37,0	37,6	37,3	4,01	3,62
3	50	31,3	32,5	31,9	3,91	3,46
4	45	26,5	28,1	27,3	3,81	3,31
5	40	23,6	24,0	23,8	3,69	3,17
6	35	19,6	20,4	20,0	3,56	3,00
7	30	15,7	16,5	16,1	3,40	2,78
8	25	13,0	13,4	13,2	3,22	2,58
9	20	9,8	10,2	10,0	3,00	2,30
10	15	6,8	7,2	7,0	2,71	1,95

Для определения показателя степени n воспользуемся графиком в логарифмах:

$$ln(t) = ln(\alpha) + n \cdot ln(V)$$

Построим график и по угловому коэффициенту определим n.



$$\boxed{n = 1{,}28 \pm 0{,}04}$$

Часть №2.

Для второй части работы нам требуется определить внутренний радиус трубки. Для этого наберем в шприц мыльный раствор и аккуратно выдавим в трубку 10 мл раствора так, чтобы не образовывались пузыри. С помощью миллиметровки измерим длину части трубки, заполненной мыльным раствором.

$$V_\text{р} = 10\ \text{мл}, L_\text{р} = 72{,}0\ \text{см}, r = \sqrt{\frac{V_\text{р}}{\pi L_\text{р}}} = (2{,}1 \pm 0{,}1)\text{мм}$$

$$\varepsilon r = \frac{1}{2}\left(\varepsilon V_\text{р} + \varepsilon L_\text{р}\right) = \frac{1}{2}(0{,}1 + 0{,}01) = 0{,}06$$

Теперь нам необходимо определить мгновенный расход воздуха при объеме пузыря в 50 мл. Сразу отметим, что средний расход за все время сдувания пузыря объемом 50 мл не равен мгновенному. Наиболее точно можно определить мгновенный расход из теоретической зависимости t(V). Рассмотрим время сдувания пузыря от объема V и от объема V+dV, где dV<<V.

$$\begin{cases} t = \alpha V^n \\ t + dt = \alpha (V + dV)^n \end{cases}$$

$$dt = \alpha V^n \left(\left(1 + \frac{dV}{V}\right)^n - 1\right) = t\left(\left(1 + \frac{dV}{V}\right)^n - 1\right) = t \cdot n \frac{dV}{V} \Rightarrow Q_\text{мгн} = \frac{dV}{dt} = \frac{V}{tn}$$

Тогда мгновенный расход для пузыря объемом 50 мл $Q = 1{,}22\ \text{см}^3/\text{с}$.

Скорость воздуха в трубке $\text{v} = \frac{Q}{\pi r^2}$.

Число Рейнольдса $\boxed{Re = \frac{\rho Q}{\pi r \eta} = 12 \pm 2.}$

$$\varepsilon Re = \varepsilon\rho + \varepsilon V + \varepsilon t + \varepsilon n + \varepsilon r + \varepsilon\eta = 0{,}04 + 0{,}02 + 0{,}015 + 0{,}03 + 0{,}06 + 0{,}03 = 0{,}2$$

Можно сделать вывод, что течение воздуха является ламинарным.

Часть 3.

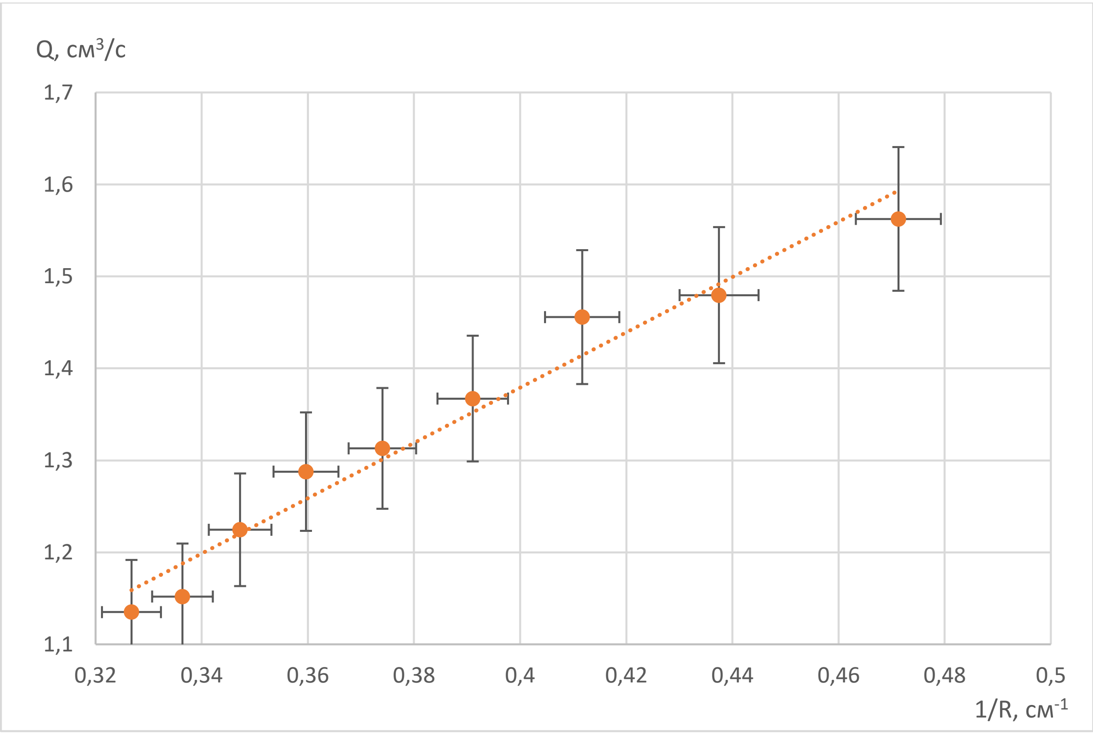
$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta l} = \frac{\pi r^4 \sigma}{2\eta l R}$$

Длину трубки измерим с помощью миллиметровки $l = (101 \pm 1)$см.

Для более точного нахождения коэффициента поверхностного натяжения построим график Q(1/R).

Радиус пузыря рассчитаем из его объема, считая пузырь полусферой. Рассмотрим силы, действующие на участок пузыря в месте соприкосновения с пластиковой пленкой. Так как поверхность пластика смочена мыльным раствором, то на участок пузыря со стороны мыльного раствора, расположенного внутри пузыря и снаружи, действуют одинаковые силы. Значит, поверхность пузыря перпендикулярна пластиковой пленке.

№	V, мл	1/R, $см^{-1}$	Q, $см^3/с$
1	60	0,327	1,13
2	55	0,336	1,15
3	50	0,347	1,22
4	45	0,360	1,29
5	40	0,374	1,31
6	35	0,391	1,37
7	30	0,412	1,46
8	25	0,437	1,48
9	20	0,471	1,56



Из графика определяем угловой коэффициент и по нему вычисляем $\sigma = (18 \pm 6)$ мН/м.

$$\varepsilon\sigma = \varepsilon k + 4\varepsilon r = 0{,}33$$

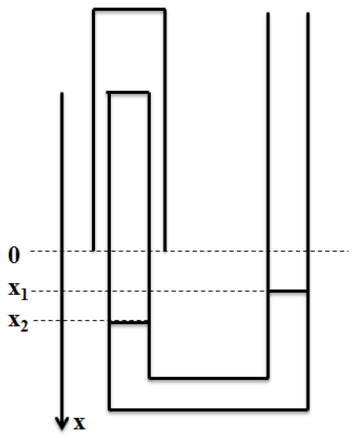
Более правильная оценка погрешности: $\varepsilon\sigma = \sqrt{(\varepsilon k)^2 + (4\varepsilon r)^2} = 0{,}25$

Критерии оценивания

№	Описание критерия	Балл
1	Количество измерений t(V) >= 5 и измерения правдоподобны	1
2	Повторные измерения (не менее 2-х измерений для одного V) с последующим усреднением (для всех точек) - 1 балл. Если не для всех точек, то 0,5 балла	1 или 0,5
3	Объем пузыря измеряется шприцом	1
4*	Идея использования логарифма или угадал показатель степени 4/3 (с последующим подтверждением графиком)	1
	Качество построения графика (в логарифмах или от степени 4/3): оси+подписи, масштаб, точки, прямая	0,25*4
5	Результат для n (оценивается, если п.4 > 0 баллов или если n считается по 2-м точкам) (1,24 - 1,36) или (1,18 - 1,42)	2 или 1
6	Метод определения радиуса трубки через наливание (если диаметр измеряли миллиметровкой, то 0 баллов за весь пункт)	0,5
	Значение радиуса трубки (при хорошем методе) (0,16 - 0,26) см	0,5
7	Метод обработки для Q мгновенное	
	Через дифференцирование t(V)	2
	Через средний расход при ΔV = (3-5) мл или через касательные к графику t(V)	1
	Через средний расход при ΔV < 3 мл или ΔV > 5 мл	0
	При использовании среднего расхода (за все время сдувания) вместо мгновенного расхода	0
8	Значение Re (7 - 22) (оценивается, если п. 7 > 0)	1
9	Погрешность Re около 20% (оценивается, если п. 7 > 0)	0,5
10	Метод получения сигма	
	По графику мгновенного расхода (посчитанного через производную) от 1/R или по 1 точке через интегрирование	2
	По одной точке по данным из п. 2 или по графику со средними расходами	1
	При использовании среднего расхода (за все время сдувания) вместо мгновенного расхода	0
11	Значение сигма (оценивается, если п. 10 >0) (14 - 26) мН/м или (8-32) мН/м	1 или 0,5
12	Погрешность сигма около 40% (оценивается, если п. 10>0)	0,5

* Если показатель степени n определялся по двум точкам, то за пункт 4 ставилось 0 баллов. Если вычислялся набор значений n по различным парам точек с последующим усреднением, то п. 4 -1 балл.

Задача 10.2. Вода и воздух (И. Воробьев)



Введем ось координат x так, как показано на рисунке (нулевое значение x на краю оболочки). Обозначим x_{10} и x_{20} начальные координаты поверхности воды в правом и левом сосудах соответственно. Будем доливать воду в правое колено и следить за изменением уровня воды в правом и левом коленах, т.е. координат x_1 и x_2. Тогда из закона Бойля-Марриотта получаем, что $H\left(p_0 + \rho g(x_{20} - x_{10})\right) = \left(H - (x_{20} - x_2)\right)\left(p_0 + \rho g(x_2 - x_1)\right)$, откуда

$$\frac{\rho g H}{p_0} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1 - \Delta x_2}\left(1 + \frac{\rho g(x_2 - x_1)}{p_0}\right), \qquad (1)$$

где $\Delta x_1 = x_{10} - x_1$, а $\Delta x_2 = x_{20} - x_2$. В табл. 1 представлены результаты измерений.

№	x_1, см	x_2, см	Δx_1, см	Δx_2, см	$\Delta x_1 - \Delta x_2$, см	$\Delta x_2/(\Delta x_1 - \Delta x_2)$
0	34.4	33				
1	27.6	31.8	6.8	1.2	5.6	0.21428571
2	21.5	31.3	12.9	1.7	11.2	0.15178571
3	15.5	30.6	18.9	2.4	16.5	0.14545455
4	7.9	29.9	26.5	3.1	23.4	0.13247863
5	-0.5	29.3	34.9	3.7	31.2	0.11858974
6	-8	28.6	42.4	4.4	38	0.11578947
7	-15.9	27.8	50.3	5.2	45.1	0.11529933
8	-24.1	27.1	58.5	5.9	52.6	0.1121673
9	-32	26.4	66.4	6.6	59.8	0.11036789
10	-40.1	25.7	74.5	7.3	67.2	0.10863095
11	-48	25	82.4	8	74.4	0.10752688
12	-56.3	24.3	90.7	8.7	82	0.10609756
13	-64.2	23.7	98.6	9.3	89.3	0.10414334
14	-72.2	23.1	106.6	9.9	96.7	0.10237849
15	-79.6	22.5	114	10.5	103.5	0.10144928
16	-87.9	21.8	122.3	11.2	111.1	0.10081008

Проанализируем уравнение (1). В левой части равенства стоит постоянная величина $\frac{\rho g H}{p_0}$. При малом значении $x_2 - x_1$ второе слагаемое в скобках много меньше единицы и $\frac{\rho g H}{p_0} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1 - \Delta x_2}$. Выберем такие измерения, при которых $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1 - \Delta x_2}$ остается постоянной, при этом так, чтобы относительная погрешность измерения расстояний была как можно меньше. Усредняя результаты измерений 5-9 получаем, что $\frac{\rho g H}{p_0} = 0{,}11$. Основной вклад в погрешность дает $\frac{\rho g(x_2 - x_1)}{p_0} < 5 \cdot 10^{-2}$, т.е. относительная погрешность примерно равна 3%.

Для измерения атмосферного давления проведем следующий эксперимент. Закачаем в тонкую трубку, расположенную горизонтально, некоторое количество воды так, чтобы она заполнила трубку от одного конца до середины. Измерим длину воздушного столбика h_0. Заткнем другой конец трубки пальцем и расположим трубку вертикально водяным столбиком вниз. В этом случае объем воздуха увеличится и из закона Бойля-Марриотта мы получаем, что

$$p_0 = \rho g l \frac{h}{h - h_0},$$

где l - высота столбика воды, а h высота воздушного столбика в вертикальном положении. Проводя несколько измерений и усредняя их мы получаем, что атмосферное давление воды равно 1020 ± 50 см. вод. ст. Основную погрешность вносит измерение $h - h_0 = 2$ см, при инструментальной погрешности 1 мм.

Из предыдущих двух пунктов можно получить, что $L = H - x =$ равна 79 ± 4 см.

Измерение H/p_0		
1	Теория. Получена формула через измеримые величины, позволяющая найти H/p_0 и описана методика проведения эксперимента.	1,5
2	Сделано приближение, позволяющее получить линейную зависимость	1
3	Таблица измерений Число точек: ≥ 5 *точек – 1 балл* *3–4 точки – 0,5 балла* Диапазон точек: Диапазон x_2 больше 5 см – 1 балл Диапазон x_2 больше 3 см – 0,5 балла	2
4	Обработка: усреднение или график	1
5	Результат $\frac{H}{p_0} = \frac{L+x}{p_0}$, где L – данные каждой установки из таблицы, x – данные из работы, $p_0 = 1027$ см.в.ст. Попадает в 10% - 1 балл Попадает в 20% - 0,5 балла	1
6	Погрешность	1
Нахождение атмосферного давления		
7	Теория. Описан метод измерения, получена формула через измеримые величины. Предложен метод с погрешностью сопоставимой с авторским решением – 1, 5 балла. *Если давление находится из решения системы уравнений п.1 – 0,5 балла (в этом случае п. 8, 9, 10 – 0 баллов)*	1,5
8	Измерения. Число измерений ≥ 3 – 1 балл 1-2 измерения – 0,5 балла Измерения дают погрешность 10% - 1 балл измерения дают погрешность 20% - 0,5 балла	2
9	Обработка: усреднение или график	1

10	Результат $p_0 = 1027$ см. в. ст. Попадание в 10% - 1 балл Попадание в 20% - 0,5 балла	1
11	Погрешность	1
	Нахождение длины *L*	
12	Результат L попадает в ворота 10%	0, 5
13	Погрешность	0, 5

Если нет верного ответа на 1 или 2 пункт задачи, то 3 пункт задачи не оценивается

Если не записан номер установки или не указано значение x, то пп. 5 и 12 не оцениваются