2. Решения заданий Регионального этапа и система оценивания каждого задания.

9 класс

1. Условие. Из каких областей земной поверхности возможно одновременное наблюдение Арктура (α Волопаса) и Хадара (β Центавра)? Координаты этих звезд считать равными α_1=14.0ч, δ_1=+19°; α_2=14.0ч, δ_2=–60° соответственно. Атмосферной рефракцией и поглощением света пренебречь.

1. Решение. Как видно из условия задачи, прямые восхождения двух звезд совпадают. Следовательно, в любом пункте Земли их верхние кульминации будут происходить одновременно. Так как нам нужно найти пункты, где Арктур и Хадар могут вместе находиться на небе хоть в какое-нибудь время, достаточно рассмотреть только наиболее благоприятный момент: верхние кульминации этих звезд. Для высоты звезды в верхней кульминации мы можем записать выражение:

$$h = 90° - |\varphi - \delta|,$$

где φ – широта места, δ – склонение звезды. Чтобы звезду можно было увидеть, высота h должна быть положительной (рефракцией и атмосферным поглощением света мы пренебрегаем). Отсюда мы имеем

$$|\varphi - \delta_1| < 90°; |\varphi - \delta_2| < 90°.$$

Первому условию удовлетворяет диапазон широт φ от –71° до +90°, второму – от –90° до +30°. Итак, Арктур и Хадар можно увидеть на небе одновременно на широтах от –71° до +30°.

1. Система оценивания. Выше было приведен наиболее простой способ решения задачи, однако он не является единственно допустимым. Участники олимпиады могут определить всю область видимости каждой из звезд на поверхности Земли для определенного момента, затем строить пересечение этих областей, обрисовывая его широтный диапазон. Возможно построение суточных путей Арктура и Хадара на небесной сфере разных широт и выделение моментов их одновременного нахождения над горизонтом. Все эти способы считаются правильными и оцениваются максимально при условии верного выполнения.

В случае решения задачи способом, описанным выше, участники олимпиады должны указать, что верхние кульминации обоих звезд происходят одновременно, и этот момент достаточен для рассмотрения. Этот вывод оценивается в 2 балла. Если он не делается, и участник олимпиады сразу определяет высоты звезд в верхней кульминации в зависимости от широты, максимальная оценка не может превышать 6 баллов.

Следующие 2 балла выставляются за правильное использование формулы для высоты в верхней кульминации, которая может быть записана по-другому – без знака модуля, в разном виде для кульминации к югу и северу от зенита. Если участник олимпиады записывает ее только в одном виде, например

$$h = 90° - \varphi + \delta,$$

получая в итоге ограничение на широту только для Хадара ($\varphi<30°$), то за этот и последующий этап решения выставляется только половина баллов (по 1 баллу за каждый) с общей оценкой не более 4 баллов.

Правильное численное определение ограничения на широту от каждой из звезд оценивается по 1 баллу. Наконец, формулировка окончательного ответа оценивается в 2 балла. Они не выставляются в случае неполного анализа верхней кульминации, описанного выше.

2. Условие. Последнее противостояние Сатурна состоялось 15 июня 2017 года. В каком ближайшем календарном году противостояния этой планеты с Солнцем не будет? Орбиты Земли и Сатурна считать круговыми.

2. Решение. В случае круговых орбит Земли и Сатурна синодический период Сатурна есть величина постоянная. Ее можно определить, исходя из величины орбитального периода Сатурна (29.458 лет), можно взять из справочных данных. Она равна (29.458/28.458)=1.03514 года или 378.1 день. Каждый следующий год противостояние Сатурна будет наступать на 13.1 день (или на 12.1 день для високосных лет) позже, чем в предыдущем году, то есть в среднем на 12.85 дней позже, чем год назад.

От 15 июня до 31 декабря проходит 199 дней. Разделив это число на 12.85, получаем 15.5 лет. Через 15 лет (в числе которых будет 4 високосных – 2020, 2024, 2028 и 2032) дата противостояния Сатурна сместится на (4*12.1)+(11*13.1)=192.5 дня. Следовательно, в 2032 году противостояние произойдет 24 или 25 декабря (в реальности – 24 декабря в 23ч UT). Следующее противостояние состоится уже в январе 2034 года. Противостояния Сатурна с Солнцем не случится в 2033 году.

Можно рассуждать другим, похожим способом. За четыре года, среди которых 3 обычных и один високосный, дата противостояния сместится на (1 · 12.1) + (3 · 13.1) = 51.4 дня. За 3 таких четырехлетки дата противостояния сместится на 154.2 дня (это будет в 2029 году). За два невисокосных года (2030 и 2031) противостояние сместится еще на 2·13.1 = 26.2 дня, а за високосный 2032 год – еще на 12.1 дня и составит 192.5 дня, как мы и получили выше.

2. Система оценивания. Первым этапом решения задачи является вычисление синодического периода Сатурна либо взятие его правильного значения из справочных данных. Этот этап решения оценивается в 1 балл. Далее участники могут пойти простым способом, выписывая даты последующих противостояний, исходя из значения синодического периода ровно в 378 дней. При условии правильного учета високосных лет эти рассуждения приводят к правильному ответу с общей итоговой оценкой 8 баллов. Если фактор високосных лет не учитывается, то, несмотря на правильный ответ, оценка снижается на 1 балл (итоговая – не более 7 баллов).

При решении задачи способом, описанным выше, 2 балла выставляется за расчет числа дней от 15 июня до 31 декабря (или 1 января), еще 5 баллов – за вычисление числа полных лет до момента, когда дата противостояния перейдет с декабря на январь. Если фактор високосных лет не учитывается, общая оценка снижается на 1 балл.

В этом же случае, 5 баллов за основной этап решения (вычисление числа полных лет) разделяются следующим образом: число дней, на которое смещается дата противостояния в невисокосном году – 2 балла, в високосном году – 1 балл, переход к числу лет до перехода противостояния в новый год – 2 балла.

3. Условие. Спутник обращается вокруг сферической планеты по эллиптической орбите. В перицентре спутник имеет высоту над поверхностью планеты 800 км и орбитальную скорость 12.3 км/с, в апоцентре – 2300 км и 11.1 км/с. Определите среднюю плотность планеты.

3. Решение. Запишем выражения для скорости тела в перицентре и апоцентре орбиты:

$$v_P = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}}; \quad v_A = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}}.$$

Здесь M – масса планеты, a – большая полуось орбиты, e – ее эксцентриситет. Разделив одно выражение на другое, имеем:

$$\frac{v_P}{v_A} \equiv K = 1.108 = \frac{1+e}{1-e}.$$

Отсюда

$$e = \frac{K-1}{K+1} = \frac{v_P - v_A}{v_P + v_A} = 0.051.$$

Для высот спутника в перицентре и апоцентре можно записать:

$$h_P = a\,(1 - e) - R;\ h_A = a\,(1 + e) - R.$$

Здесь R – радиус планеты. Вычитая из второго уравнения первое, имеем:

$$h_A - h_P = 2ae; \quad a = \frac{h_A - h_P}{2e} = 14700 \text{ км}.$$

Теперь мы можем найти радиус планеты:

$$R = a\,(1 - e) - h_P = 13150 \text{ км}$$

или 2.06 радиуса Земли. Масса планеты равна:

$$M = \frac{v_P^2 a}{G} \cdot \frac{1-e}{1+e} = 3.0 \cdot 10^{25} \text{ кг}$$

или 5 масс Земли. Наконец, плотность планеты составляет

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} = 3200 \text{ кг/м}^3$$

или 0.57 от плотности Земли.

3. Система оценивания. Решение задачи можно производить разными способами. При решении способом, описанным выше, последовательно находятся эксцентриситет орбиты (2 балла), большая полуось орбиты (1 балл), радиус планеты (2 балла), масса планеты (2 балла) и, наконец, плотность планеты (1 балл). При решении другим способом необходимо также разбить его на соответствующие этапы, оценивая каждый из них, исходя из его сложности.

При допущении ошибки на одном из этапов решения баллы за этот этап не выставляются, а последующие оцениваются только в том случае, если сделанная ошибка не приводит к заведомо абсурдным характеристикам планеты.

4. Условие. Толщина диска нашей Галактики составляет 800 световых лет. Солнце находится вблизи плоскости Млечного пути. Оцените, сколько звезд со светимостью порядка солнечной можно увидеть со всей Земли в телескоп ТАЛ-1 с диаметром главного зеркала 110 мм? Считать концентрацию таких звезд в диске Млечного пути постоянной и равной 0.01 пк$^{-3}$. Межзвездным поглощением света пренебречь.

4. Решение. Определим предельную звездную величину для телескопа ТАЛ-1:

$$m = 6 + 5 \lg (D/d) = 12.3.$$

Здесь D и d – диаметры объектива телескопа (110 мм) и зрачка глаза (6 мм). Вычислим теперь расстояние, с которого Солнце будет иметь такую звездную величину:

$$\lg r = \frac{m - M + 5}{5}; \quad r = 330 \text{ пк} \approx 1000 \text{ св. лет.}$$

Эта величина значительно больше полутолщины диска Галактики, поэтому область видимости солнцеподобных звезд можно считать цилиндром радиусом r=330 пк и высотой h=800 св.лет (245 пк). Объем этого цилиндра будет равен

$$V = \pi r^2 h = 8 \cdot 10^7 \text{ пк}^3.$$

Число видимых звезд N будет равно $V{\cdot}n$ или 800 тысяч. Здесь n – концентрация звезд заданного типа.

4. Система оценивания. Для решения задачи необходимо определить проницающую способность телескопа ТАЛ-1, что оценивается в 2 балла. При этом диаметр зрачка глаза может браться от 6 до 8 мм с интервалом предельных звездных величин от 11.7 до 12.3, что будет влиять на дальнейшие ответы, но считается правильным. Определение максимального расстояния, с которого будут видны такие звезды, оценивается еще в 2 балла. Предельная чувствительность глаза также может быть взята в диапазоне от 6 до 6.5^m, что не считается ошибкой. Далее необходимо сделать вывод, что предельное расстояние существенно больше полутолщины диска Галактики, и область наблюдения таких звезд представляет собой цилиндр (1 балл). Если этого не делается, и область считается сферической, то за все оставшееся решение с ответом 1.5 млн звезд выставляется не более 1 балла с общей оценкой не более 5 баллов.

Наконец, определение объема данной области оценивается в 2 балла, вычисление количества звезд – в 1 балл.

5. Условие. Предположим, что все звезды на небе, как и полагали в древности, расположены на большой хрустальной сфере, движущейся вокруг Земли и тем самым создающей эффект суточного вращения. Какой должен быть радиус такой небесной сферы (в астрономических единицах), чтобы ее линейная скорость на экваторе была равна скорости света?

Анаксимандр из Милета при этом считал, что звезды – это дыры в небе, через которые виден "небесный огонь". Угловой диаметр звезды Канопус равен 0″.0069. Мог бы человек тогда пролезть в "дыру", соответствующую Канопусу?

Предположим далее, что звезды – это постоянные источники света, а звездные сутки на Земле увеличиваются на 2 мс за 100 лет. Какова скорость расширения хрустальной сферы, если ее линейная скорость вращения на экваторе постоянна и равна скорости света? На сколько звездных величин потускнели бы звезды со времен Анаксимандра (за 2600 лет)?

5. Решение. На данный момент Земля поворачивается вокруг своей оси за T_0 = 23ч56м, т.е. ее угловая скорость равна $2\pi/(86160\ \text{с}) = 7.3\cdot10^{-5}$ рад/с. В нашей модели Земля неподвижна, а крутится сама небесная сфера с такой же угловой скоростью. Отсюда получаем расстояние, на котором линейная скорость такого вращения достигает скорости света:

$$R_0 = \frac{c\cdot T_0}{2\pi} = 4.1\cdot10^{12}\ \text{м} = 27.5\ \text{а.е.}$$

Выходит, что радиус небесной сферы должен быть немного меньше среднего расстояния до Нептуна. На таком расстоянии угловому размеру 0″.0069 соответствует линейный размер R_0·(0.0069/206265)=140 км. Это расстояние более чем достаточно для прохода человека. Далее, продолжительность звездных суток меняется на Земле линейно по формуле

$$T(t) = T_0 + \dot{T}t.$$

Здесь T_0 – продолжительность суток в некий начальный момент времени, $\dot{T}$ – скорость ее изменения. Тогда радиус хрустальной сферы меняется по закону

$$R = \frac{c}{2\pi}T(t) = \frac{c}{2\pi}(T_0 + \dot{T}t) = R_0 + \frac{c\dot{T}}{2\pi}t,$$

то есть увеличивается линейно со скоростью

$$V = \frac{c\dot{T}}{2\pi} = 0.95 \text{ км/год.}$$

Здесь R_0 – начальный радиус сферы. Наконец, за 2600 лет звезды удалились на расстояние ΔR=2470 км = $1.65\cdot10^{-5}$ а.е. Воспользовавшись формулой Погсона, получаем изменение звездной величины:

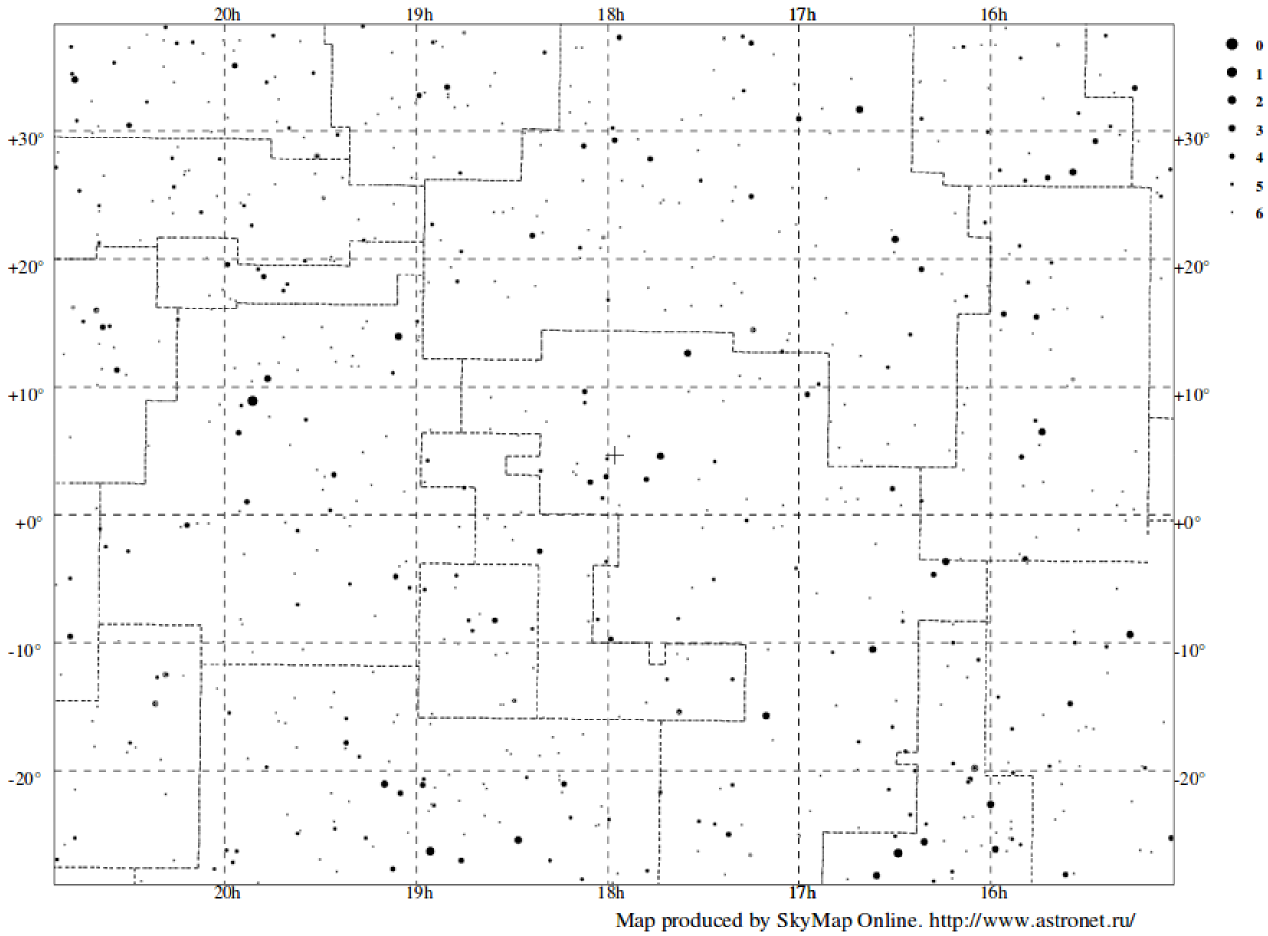
$$\Delta m = -2.5\lg\left(\frac{R_0 - \Delta R}{R_0}\right)^2 = -5\lg\left(1 - \frac{\Delta R}{R_0}\right) \approx 2.16\frac{\Delta R}{R_0} = 0.0000013^{\text{m}}.$$

5. Система оценивания. Каждый из четырех вопросов задачи оценивается в 2 балла. Один балл выставляется за правильный вывод формулы, второй – за вычисления и конечный ответ. В последнем вопросе одинаково верно оценивается и утверждение о том, что блеск заметно или почти совсем не изменится, и вычисление малого изменения блеска. Если в качестве периода вращения сферы звезд берутся солнечные сутки (24 часа), то оценка за первый этап снижается на 1 балл, оставшиеся этапы оцениваются в полной мере (максимальная оценка – 7 баллов).

6. Условие. Собственное движение звезды Барнарда равно –0.8″/год по прямому восхождению и +10.3″/год по склонению. Лучевая скорость равна –111 км/с, параллакс –

0.547″. Вам дана звездная карта окрестностей этой звезды. Сама звезда находится в середине карты и помечена крестом. Определите:

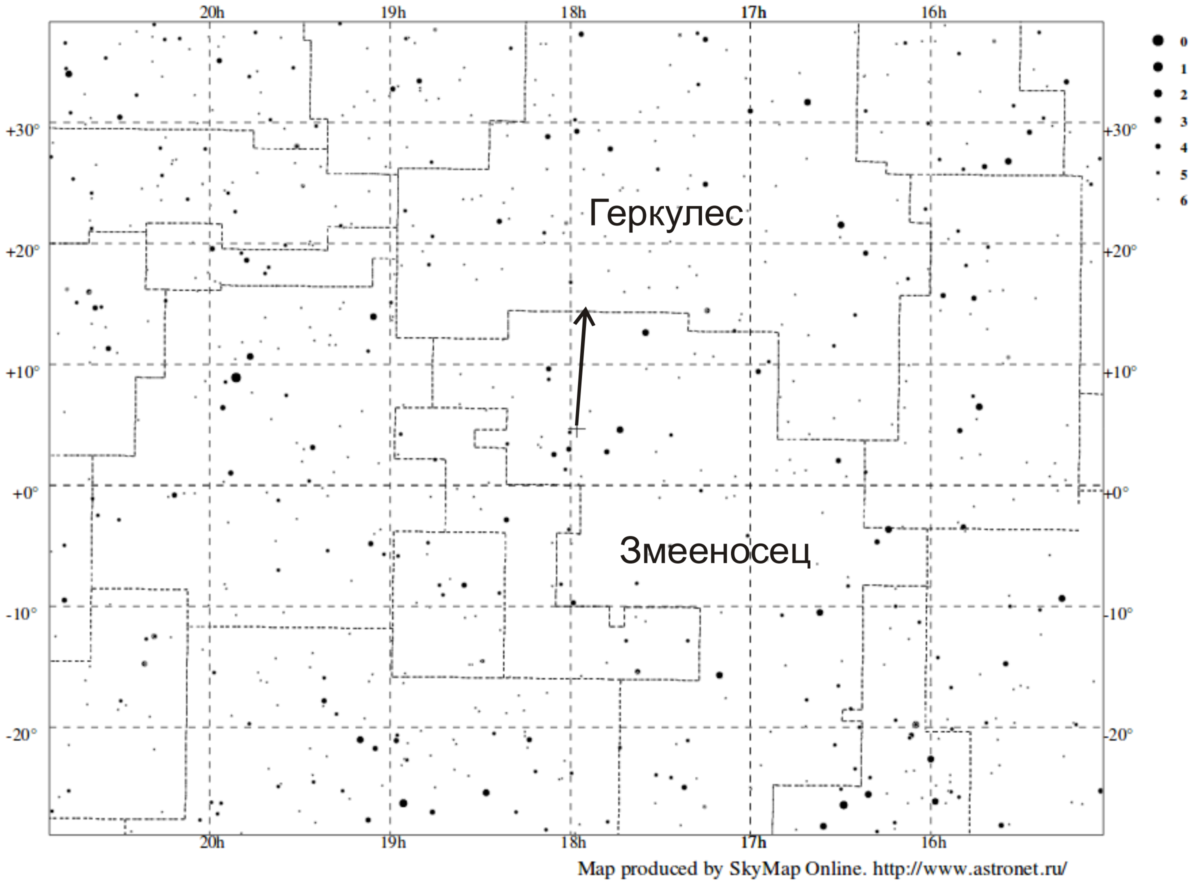
1) В каком созвездии находится звезда Барнарда?
2) В каком направлении на карте движется звезда?
3) В какое созвездие эта звезда переместится?
4) Когда это произойдет?

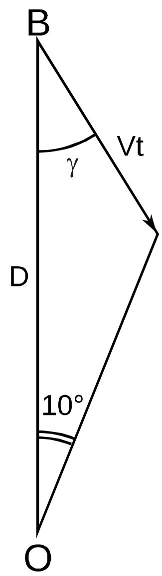


Решение. На текущий момент звезда Барнарда располагается в созвездии Змееносца. Само это созвездие не имеет ярко выраженного рисунка, но его имеют ближайшие соседние созвездия. Так к востоку находится легко узнаваемое созвездие Орла, рядом с ним Стрела и Дельфин. В правом верхнем углу созвездие Северной короны, а правом нижнем – характерная часть созвездия Скорпион.

Собственное движение звезды Барнарда по склонению в десять раз больше, чем по прямому восхождению. Поэтому звезда будет двигаться почти строго вдоль круга склонения, а движением по прямому восхождению можно пренебречь. Раз собственное движение звезды по склонению положительно, значит, со временем склонение звезды увеличивается, а сама звезда смещается в сторону северного полюса мира. В том направлении расположено созвездие Геркулеса.

Текущие координаты звезды можно определить с помощью карты в условии. Они равны α~18ч~270°, δ=+4.5°. До границы с созвездием Геркулеса почти ровно 10°. Определим, за какое время наша звезда преодолеет это угловое расстояние. Решим вначале задачу наиболее точно.





Поскольку лучевая скорость звезды отрицательна, она приближается к нам. Ее тангенциальная скорость равна

$$V_T = 4.74\frac{\mu}{\pi} = 89.3 \text{ км/с.}$$

Здесь μ – собственное движение в угловых секундах в год, а π – параллакс в угловых секундах. Полная скорость звезды равна

$$V = \sqrt{V_T^2 + V_R^2} = 142 \text{ км/с.}$$

Здесь V_R – лучевая скорость звезды в км/с. Угол между лучом зрения и направлением вектора скорости звезды составляет

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left|\frac{V_T}{V_L}\right| = 39^{O}.$$

Расстояние до звезды D равно π^{-1}=1.83 пк или $5.65\cdot 10^{13}$ км. Искомое время получаем из теоремы синусов:

$$t = \frac{\sin 10^{O}}{\sin(180^{O} - 10^{O} - \gamma)}\frac{D}{V} = 2900 \text{ лет}.$$

Ответ задачи с неплохой точностью можно получить быстрее, учитывая, что угловое расстояние до границы созвездий (10°) существенно меньше угла γ (39°). В этом случае мы можем предположить, что собственное движение звезды Барнарда по созвездию Змееносца постоянно по времени. Тогда время до пересечения границы есть просто отношение углового расстояния до нее к собственному движению:

$$\bar{t} = \frac{10^{O}}{10.3''/\text{год}} = 3500 \text{ лет}$$

Этот ответ получился завышенным из-за игнорирования приближения звезды Барнарда и увеличения ее собственного движения.

6. Система оценивания. Правильное указание текущего положения звезды Барнарда в созвездии Змееносца оценивается в 1 балл. Указание соседних созвездий в доказательство этого вывода не требуется. Правильное указание направления движения звезды оценивается в 2 балла. Ответ, что звезда переместится в созвездие Геркулеса, оценивается 1 баллом, но только в том случае, если направление движения звезды указано верно, и звезда, двигаясь в этом направлении, действительно окажется в созвездии Геркулеса.

Дальнейшее решение задачи оценивается в полной мере вне зависимости от предыдущих этапов. Определение расстояния (по рисунку), которое отделяет звезду от созвездия Геркулеса, оценивается в 1 балл (если выбрано ошибочное направление движения звезды, то берется угловое расстояние от соответствующего созвездия). Вычисление времени t оценивается в 3 балла. Оно может производиться в разное количество этапов. Если решение не доведено до конца или с какого-то момента становится неверным, следует выставлять по 1 баллу за правильное вычисление расстояния до звезды и ее тангенциальной скорости.

Вычисление времени упрощенным методом оценивается в 1 балл (суммарная оценка – до 6 баллов).