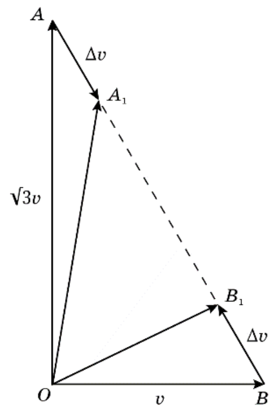
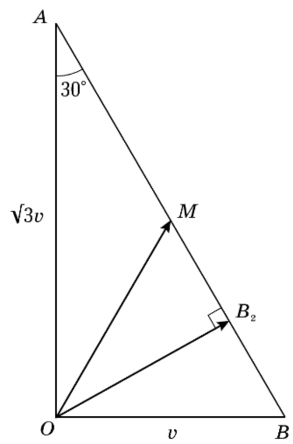
10.1. Просто трение

Возможное решение

Рассмотрим векторы начальных скоростей бруска и фанеры и их изменения за некоторый малый промежуток времени Δt. На рисунке вектор OA соответствует скорости бруска, вектор OB скорости фанеры в начальный момент времени. Векторы изменений их скоростей равны по модулю (так как массы равны) и направлены вдоль вектора их относительной скорости AB (скорость бруска относительно фанеры – вектор AB, а сила трения, действующая на брусок направлена от A к B и наоборот для листа фанеры).



Через время Δt концы векторов новых скоростей OA_1 и OB_1, по-прежнему лежат на AB и силы трения, действующие на тела, по-прежнему направлены вдоль AB. Скорости бруска и фанеры будут изменяться до тех пор, пока не выровняются по величине и направлению, а точки A_1 и B_1 не окажутся на середине AB. Дальнейшее очевидно из геометрии. Скорость бруска уменьшается, пока не достигнет постоянного значения OM, $OM = AB/2 = \upsilon$. Минимальная скорость листа фанеры достигается прежде, чем скорости установятся – длина вектора OB_2 равна $OB_2 = OA\sin 30^\circ = \sqrt{3}\upsilon/2$.



Таким образом, минимальная скорость бруска относительно льда при движении равна υ, а фанеры, соответственно $\sqrt{3}\upsilon/2$.

10.2. Расталкивание

Возможное решение

1. После первого столкновения скорость правого бруска $u_1 = 2m\upsilon/(M+m) = \upsilon/2$, скорость тележки $\upsilon_1 = \upsilon(m - M)/(M+m) = -\upsilon/2$ (из законов сохранения энергии и импульса). Знак минус означает, что тележка начнёт двигаться влево.

2. Из законов сохранения энергии и импульса при столкновении с левым бруском получим, что тележка будет двигаться вправо со скоростью $\upsilon/4$. А скорость правого бруска после второго столкновения с тележкой станет $\upsilon_2 = \upsilon/8 = \upsilon_1/4$. Соответственно $\upsilon_3 = \upsilon_2/4$ и т.д.

3. А) Кинетические энергии правого бруска будут изменяться также в геометрической прогрессии. но с показателем 1/16. Отсюда можно найти полное перемещение правого бруска, а затем и левого.

Б) Можно заметить, что после каждого столкновения отношение кинетических энергий правого и левого брусков остаётся одинаковым и равным 4, тогда $L_{\text{Лев}} = L_{\text{Прав}}/4$. С учётом работы силы трения имеем $m\upsilon^2/2 = \mu Mg\left(L_{\text{Лев}} + L_{\text{Прав}}\right)$, а так как $m = M/3$, то $L_{\text{Прав}} = 2\upsilon^2/(15\mu g)$ и и $L_{\text{Лев}} = \upsilon^2/(30\mu g)$.

10.3. Из глубины...

Возможное решение

Массу пузырька воздуха можно не учитывать, поэтому сила F сопротивления движению равна силе Архимеда $F_А$: $F = F_A$, или иначе: $kr\upsilon = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$.

Отсюда найдём $\upsilon = \frac{4\pi}{3}\frac{r^2\rho g}{k}$.

В соответствии с законом Бойля-Мариотта (pV = const) запишем:

$$\frac{4\pi}{3} r_0^3\left(p_0+\rho g h_0\right) = \frac{4\pi}{3} r^3\left(p_0+\rho g h\right).$$

Зависимость радиуса пузырька от глубины такова:

$$r = r_0\left(\frac{p_0+\rho g h_0}{p_0+\rho g h}\right)^{1/3}.$$

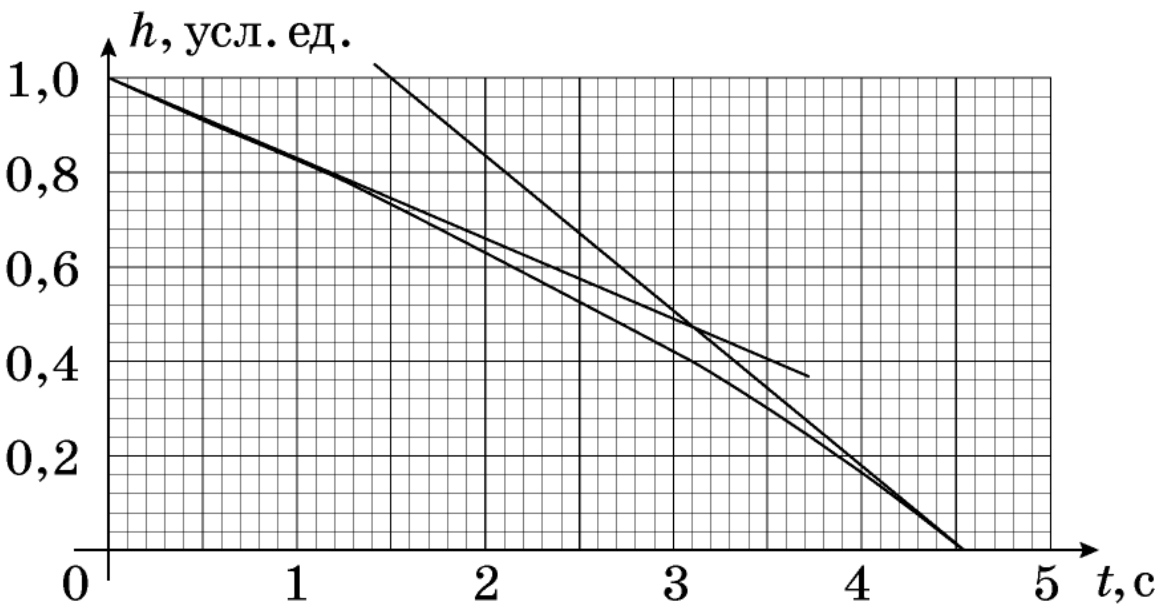
Откуда

$$\upsilon = \frac{4\pi\rho g r_0^2}{3k}\left(\frac{p_0+\rho g h_0}{p_0+\rho g h}\right)^{2/3}.$$

Скорости пузырька вблизи дна $\upsilon\left(h_0\right)$ и у поверхности $\upsilon\left(0\right)$ относятся как

$$\frac{\upsilon(0)}{\upsilon\left(h_0\right)} = \left(\frac{p_0+\rho g h_0}{p_0}\right)^{2/3}.$$

Отношение скоростей можно определить через отношение угловых коэффициентов касательных, проведенных к графику зависимости $h(t)$ в соответствующих точках. Для нашего графика (данного в условии)



$$\frac{\upsilon(0)}{\upsilon(h_0)} \approx 1{,}8;$$

$$\frac{p_0 + \rho g h_0}{p_0} \approx 2{,}4;$$

$$h_0 \approx 14 \text{ м.}$$

Для ответа на второй вопрос задачи достаточно заметить, что на любой глубине скорость пузырька, пропорциональна квадрату его начального радиуса. Соответственно, для пузырька с начальным радиусом 0,5 мм скорость будет в четыре раза меньше, чем для пузырька радиусом r_0 = 1 мм, а время движения будет в четыре раза больше, то есть примерно 18 с.

При ответе на третий вопрос задачи найдем радиус пузырька, имевшего r_0 = 1 мм на глубине 14 м, когда он достигнет глубины 10 м.

$$r_0' = r_0\left(\frac{p_0 + \rho g h_0}{p_0 + \rho g h}\right)^{1/3} = r_0\left(\frac{24}{20}\right)^{1/3}$$

Такой же пузырек в соответствие с графиком движется от глубины 10 м до поверхности t' = 2,9 с. Пузырек, имеющий на этой глубине радиус r_0 = 1 мм будет двигаться в $\left(\frac{r_0'}{r_0}\right)^2$ раз медленнее, то есть достигнет поверхности за время

$$t = t'\left(\frac{r_0'}{r_0}\right)^2 \approx 3{,}3 \text{ с.}$$

10.4. Частичный нагрев

Возможное решение

1. Пусть S сечение цилиндров, ν полное число молей газа, R газовая постоянная. Из уравнения состояния идеального газа для начальной ситуации имеем: $2p_oSL = \nu RT_o$.
2. При открытом вентиле давление газа слева и справа одинаково, обозначим его p.
3. Из уравнения состояния в применении к каждому цилиндру при открытом вентиле и разных температурах имеем: $pSL = \nu_1RT_o$; $pSL = \nu_2RT$, где ν_1 и ν_2 число молей слева и справа.
4. Так как суммарное число молей неизменно, то $\nu = \nu_1 + \nu_2$.
5. Отсюда выражаем давление $p = 2p_oT/(T + T_o)$.
6. После закрытия вентиля число молей газа слева и справа остаются прежними. В конце температура везде T_o, а объёмы газа слева и справа соответственно $(L + h)S$ *и* $(L - h)S$.
7. Разница давлений газа при перепаде уровней $p_1 - p_2 = 2\rho gh$.
8. Выразим давления через уравнение состояния и предыдущие соотношения:
   $\nu_1RT_o/(L + h)S - \nu_2RT_o/(L - h)S = pL/(L + h) - pLT_o/T(L - h) = 2\rho gh$.
9. Подставив $p = 2p_oT/(T + T_o)$ получим уравнение для искомой T:
   $p_oLT/(T + T_o)(L + h) - p_oLT_o/(T + T_o)(L - h) = \rho gh$.
10. Откуда $T = T_o(L + h)(p_oL + \rho gh(L - h))/(L - h)(p_oL - \rho gh(L + h))$.

10.5. Нелинейная электрическая цепь

Возможное решение

Каждый диод может быть открыт или закрыт. Всего возможны три варианта:

а) оба диоды закрыты;

б) один диод закрыт (например, D_1), другой (D_2) отрыт;

в) оба диоды открыты.

Случай (а) $U_{AD} = U_{DC} = U_{CB} = U_{AB} / 3$. $U_{AC} = U_{AD} + U_{DC} > U_0$ – не подходит.

Случай (б) $U_{DB} = 1\ B$; $U_{DC} = U_{CB} = 0,5\ B$; $U_{AC} = 4,5\ B > U_0$ – не подходит.

Случай (в) $U_{AC} = U_{AD} = U_0 = 1\ B$.

$U_1 = U_3 = U_{AB} - U_0 = 4\ B$.

$U_2 = U_{AB} - 2U_0 = 3\ B$.

$I_{D1} = I_{D2} = I_{N3} + I_{N2} = kU_3^2 + kU_2^2 = 2,5\ A$.

10 класс

Критерии оценивания

Задача 1. Просто трение.

1. Утверждение, что силы трения направлены параллельно относительной скорости бруска и фанеры — 1 балл
2. Вывод о том, что направление относительной скорости и сил трения остается неизменным в процессе всего движения — 3 балла
3. Обоснованно получены минимальные скоростей бруска и фанеры по 3 балла — 6 баллов

Примечание. За математические ошибки при верной физической модели, позволяющей получить корректный результат, но допущенной математической ошибке снимается 1 балл.

Задача 2. Расталкивание.

1. Нахождение скоростей после 1-го столкновения — 3 балла
2. Нахождение скоростей после последующих столкновений — 3 балла

3А. Нахождение отношения энергий и перемещений из геометрической прогрессии $L_{\text{Прав}} = 2\upsilon^2/(15\mu g)$ и $L_{\text{Лев}} = \upsilon^2/(30\mu g)$ — 4 балла

3Б. См. решение варианта Б — 4 балла

Баллы за 3А и 3Б не суммируются, это разные варианты решений!

Задача 3. Из глубин...

1. Указано, что из-за малости массы воздуха в пузырьке, можно приравнивать силу сопротивления движению силе Архимеда — 1 балл
2. Получено выражение для связи скорости пузырька с его размером — 1 балл
3. С использованием закона Бойля-Мариотта получено уравнение для связи радиуса пузырька на глубине h с начальным размером пузырька и глубиной — 1 балл
4. Получено выражение для зависимости скорости пузырька от начального размера и глубины — 1 балл
5. Обоснованно получен ответ для глубины озера, в пределах 10 - 20 [illegible] — 2 балла
6. Обоснованно получен ответ для времени всплытия пузырька с радиусом 0,5 мм — 1 балл
7. Идея ответа на третий вопрос задачи через сравнение времен всплытия пузырьков разных радиусов с одной глубины и верный пересчет размера пузырька для глубины 10 м именно для этой цели (1 балл +1 балл) — 2балла
8. Получен обоснованный ответ на третий вопрос задачи в пределах 2,3 - 4,3 [illegible] — 1 балл

Задача 4. Частичный нагрев.

1.	Уравнение состояния для начальной ситуации ($2p_oSL = \nu RT_o$)	1 балл
2.	Равенство давлений при открытом вентиле	0,5 балла
3.	Уравнение состояния в случае разных температур ($pSL = \nu_1 RT_o$; $pSL = \nu_2 RT$)	1 балл
4.	Неизменность суммарного числа молей ($\nu = \nu_1 + \nu_2$)	0,5 балла
5.	Нахождение давления p ($p = 2p_oT/(T + T_o)$)	1 балл
6.	Ситуация после закрытия вентиля и остывания	1 балл
7.	Перепад давлений ($p_1 - p_2 = 2\rho gh$)	1 балл
8.	Уравнения для искомого T	2 балла
9.	Нахождение искомого T (*См. ответ в тексте*)	2 балла

Задача 5. Нелинейная электрическая цепь.

1.	Доказано, что диоды открыты, ток через диоды течет, напряжения на диодах равно 1 В	2 балла
2.	Получено значение напряжения на элементах Н1 и Н3	2 балла
3.	Получено значение напряжения на Н2 с верным указанием направления тока через него или полярности напряжения (при неверно указанной полярности пункт оценивается в 1 балл, то же самое, если направление тока или полярность напряжения вообще не упоминается)	2 балла
4.	Верно найдены токи через все элементы	2 балла
5.	Использовано первое правило Кирхгофа для нахождения тока через диоды	1 балл
6.	Обоснованно получен верный ответ для тока через диоды	1 балл