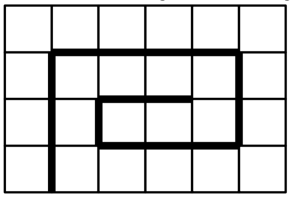
Всероссийская олимпиада школьников по информатике, 2017/18 уч. год
Первый (школьный) этап, г. Москва
Решения заданий для 7–8 классов

Задача 1. Спиральная дорожка

Лужайка в парке имеет форму прямоугольника размером $a \times b$ метров, разбитого на квадраты со стороной 1 метр. Необходимо поставить внутри лужайки ограждения между некоторыми квадратами так, чтобы образовалась спиральная дорожка, закручивающаяся к центру лужайки. Определите длину такого ограждения.

На рисунке изображена лужайка размером 4 × 6 и ограждение, которое необходимо поставить на ней. Длина ограждения для такой лужайки будет равна 15.



Ответом на эту задачу является некоторое выражение, которое может содержать целые числа, переменные *a* и *b* (записываемые английскими буквами), операции сложения (обозначается «+»), вычитания (обозначается «−»), умножения (обозначается «*»), деления (обозначается «/») и круглые скобки для изменения порядка действий. Запись вида «2*a*» для обозначения произведения числа 2 и переменной *a* неверная, нужно писать «2 * *a*».

Пример правильного (по форме записи) выражения: $a + (b - a) * 2$.

Решение

Посчитаем общее число горизонтальных и вертикальных отрезков длины 1 между клетками на рисунке лужайки. Их число равно $a \times (b - 1) + b \times (a - 1)$.

После того, как будет поставлено ограждение, отрезков, в которых не будет поставлено ограждение, останется $a \times b - 1$, так как получится цепочка из $a \times b$ клеток, между двумя соседними клетками в цепочке ограждение отсутствует.

Таким образом, ответом является выражение $a * (b - 1) + b * (a - 1) - (a * b - 1)$. Это выражение можно упростить до вида $(a - 1) * (b - 1)$, которое можно просто получить подбором, рассматривая примеры для разных значений *a* и *b*.

Задача 2. Книжная полка

В библиотеке на полке стоят 8 томов полного собрания сочинений одного писателя. Библиотекарь обозначил их латинскими буквами от A до H в порядке выхода томов. Получилась следующая последовательность:

E D G H C B F A

Библиотекарь решил переставить эти книги так, чтобы они шли по порядку: A, B, C, D, E, F, G, H. За одно действие библиотекарь может взять несколько подряд идущих книг, достать их с полки и, не меняя порядок следования книг, перевернуть их и поставить на место в обратном порядке. Например, если библиотекарь достанет книги с H по F и перевернёт их, то новый порядок следования книг будет таким: E, D, G, F, B, C, H, A.

Помогите библиотекарю упорядочить этот ряд книг за минимальное число действий. То, что некоторые книги окажутся перевёрнутыми вверх ногами, библиотекарю не важно.

Ответом на эту задачу является последовательность операций. Одна операция записывается в одной строке. Описание каждой операции состоит из двух латинских букв (от A до H), которые являются обозначениями крайних томов в переворачиваемом фрагменте, например, выше был рассмотрен пример для операции «H F».

Чем меньше операций будет в вашем алгоритме, тем больше баллов вы получите, при условии, что в результате применения вашего алгоритма тома будут расставлены по порядку от A до H.

Решение

Наилучшее решение этой задачи содержит четыре операции:

```
G B
B C
H A
E A
```

Есть и другие варианты решения, использующие четыре операции.

Задача 3. Гирьки

Есть чашечные весы без делений. Для взвешивания груза также можно использовать гирьки, массы которых – целое число граммов. Вам необходимо предложить набор гирек, при помощи которого можно отмерить на весах любую массу, равную целому числу граммов от 1 до 40. Гирьки можно класть на каждую чашку весов, чашки весов должны находиться в равновесии, при этом на одной из чашек весов должен находиться взвешиваемый груз. Массы гирек в наборе могут повторяться.

Например, при помощи трёх гирек массами 1, 1 и 5 граммов можно отмерить любую целочисленную массу от 1 до 7 граммов по следующей схеме (x – взвешиваемая масса):

1 грамм: $x = 1$,

2 грамма: $x = 1 + 1$,

3 грамма: $x + 1 + 1 = 5$,

4 грамма: $x + 1 = 5$,

5 граммов: $x = 5$,

6 граммов: $x = 5 + 1$,

7 граммов: $x = 5 + 1 + 1$.

Ответом на эту задачу являются несколько целых чисел, записанных через пробел, – массы гирек, при помощи которых можно отмерить любую целочисленную массу от 1 до 40. В наборе должно быть не более 8 чисел. Числа в наборе могут повторяться. Чем меньше гирек будет в предложенном наборе, тем больше баллов вы получите, при условии, что, используя гирьки из данного набора, можно отмерить каждую целочисленную массу от 1 до 40.

Решение

Возникает желание использовать в ответе степени двойки: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Но такое решение не является оптимальным, поскольку не использует возможность класть гирьки на обе чашки весов. Если гирьки можно класть на обе чащи весов, то каждая из гирек может учитываться с коэффициентом −1 или +1, в зависимости от того, лежит ли она на одной чашке со взвешиваемой массой или на противоположной, а также с коэффициентом 0, если гирька не участвует во взвешивании. Поэтому вместо степеней двойки можно использовать степени тройки: 1, 3, 9, 27. Возможность представления всех масс от 1 до 40 следует из того, что все целые числа можно представить в симметричной троичной системе счисления, то есть в виде сумм степеней тройки, умноженных на коэффициенты 0, 1 и −1, а также из того факта, что $40 = 1 + 3 + 9 + 27$.

Ответ: 1 3 9 27.

Задача 4. Возведение в степень

Вы хотите возвести данное число a в некоторую целочисленную степень n, но ваш калькулятор умеет только перемножать числа. Например, вы можете вычислить $a^2 = a \times a$, затем вы можете вычислить $a^3 = a^2 \times a$ или $a^4 = a^2 \times a^2$.

Вы можете по-разному организовать вычисление значения a^n. Например, вычислить a^5 можно за 4 умножения:

1) $a^2 = a \times a$,
2) $a^3 = a^2 \times a$,
3) $a^4 = a^3 \times a$,
4) $a^5 = a^4 \times a$.

Но можно вычислить a^5 всего лишь за 3 умножения:

1) $a^2 = a \times a$,
2) $a^3 = a^2 \times a$,
3) $a^5 = a^3 \times a^2$.

Вам необходимо определить, за какое минимальное число умножений можно вычислить следующие степени: 7, 15, 23, 63. Вычисление каждой из этих степеней должно быть независимо от остальных, то есть при вычислении 15-й степени нельзя использовать вычисления, проделанные ранее для вычисления 7-й степени. Вы решаете четыре независимые задачи – за какое минимальное число умножений можно вычислить 7-ю степень, 15-ю степень, 23-ю степень и 63-ю степень.

Ответ на это задание записывается в четырёх строках. Каждая строка должна содержать последовательность вычисления каждой из указанных степеней. Первая строка должна содержать последовательность вычисления 7-й степени, вторая строка – 15-й степени, третья строка – 23-й степени, четвертая строка – 63-й степени.

Каждая строка содержит через пробел несколько целых чисел – значения степеней в том порядке, в котором они вычисляются. Например, для вычисления 5-й степени решение можно записать в виде строки

2 3 5

или

2 4 5,

что означает, что последовательно вычисляются степени a^2, a^3, a^5 (одно возможное решение) или a^2, a^4, a^5 (другое возможное решение). Такм образом, каждая строка должна начинаться числом 2, а заканчиваться тем значением степени, которое нужно вычислить (7, 15, 23, 63).

Чем меньше операций умножения вы будете использовать, тем больше баллов вы получите, при условии, что предложенные последовательности вычисления степеней являются корректными.

Решение

В этой задаче также возникает желание использовать двоичную систему счисления, как и в алгоритме быстрого возведения в степень. Например, чтобы вычислить a^7 степень, необходимо вычислить a^2 и a^4, а затем перемножить a, a^2, a^4. Всего понадобится 4 умножения. Для вычисления a^{15}, a^{23}, a^{63} через двоичную систему счисления понадобится 6, 7 и 10 умножений соответственно.

Но есть способ вычислить a^{15}, a^{23}, a^{63} используя меньшее число умножений — 5, 6 и 8. Пример наилучшего решения.

```
2 3 5 7
2 3 6 12 15
2 3 5 10 20 23
2 3 6 12 15 30 60 63
```

Задания по программированию

Решения задач 5–7 совпадают с решениями задач 1–3 для 9–11 классов.