Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **1 февраля 2019 г.** (I тур) и **2 февраля 2019 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2018–2019 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018–2019 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Таким образом, проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 1 февраля 2019, по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства $f(1) = g(2)$ и $g(1) = f(2)$. Найдите сумму всех четырёх корней этих трёхчленов. (*Н. Агаханов*)

Ответ. 6.

Первое решение. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$. Тогда условия задачи запишутся в виде

$$1 + a + b = 4 + 2c + d \quad \text{и} \quad 4 + 2a + b = 1 + c + d.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $-3 - a = 3 + c$, то есть $a + c = -6$. Но по теореме Виета $-a$ — это сумма корней первого трёхчлена, а $-c$ — сумма корней второго трёхчлена, откуда и следует требуемое.

Второе решение. Рассмотрим вспомогательный квадратный трёхчлен $h(x) = g(3 - x)$ (он тоже приведённый!). Тогда $h(x) - f(x)$ — линейный многочлен с корнями 1 и 2; значит, он тождественно нулевой, то есть $f(x) = g(3-x)$. Поэтому, если x_0 является корнем $f(x)$, то $3 - x_0$ является корнем $g(x)$, и сумма этих двух корней равна 3. Аналогично, сумма остальных корней этих многочленов также равна 3.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Только верный ответ с приведённым примером двух трёхчленов, удовлетворяющих условиям задачи — 1 балл.

Доказано, что $a + c = -6$ (в обозначениях первого решения) — 3 балла.

Доказано, что $f(x) = g(3 - x)$ — 3 балла.

9.2. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то целое число. Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», ..., десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (*О. Подлипский*)

Ответ. 8 рыцарей.

Решение. Докажем, что ни один из рыцарей не мог сказать ни одной из фраз «Моё число больше 9» и «Моё число больше 10». В самом деле, если бы это было возможно, то задуманное рыцарем целое число было бы не меньше 10. Но тогда он не мог сказать ни одной из фраз «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», $\ldots$, «Моё число меньше 10». Значит, рыцарей было не больше восьми.

Покажем, что рыцарей могло быть 8. Пусть первый рыцарь загадал число 2, второй — 3, $\ldots$, восьмой — 9, а лжецы загадали числа 5 и 6. Тогда k-ый рыцарь мог сказать фразы «Моё число больше k» и «Моё число меньше $k+2$», а лжецы могли сказать фразы: один — «Моё число больше 9» и «Моё число меньше 1», а другой — «Моё число больше 10» и «Моё число меньше 2».

Замечание. Приведённый выше пример перестаёт быть верным, если лжецы задумывают числа вне отрезка $[1;10]$, так как тогда некоторые их высказывания становятся верными.

Комментарий. Доказано, что рыцарей не больше 9 — 0 баллов.

Доказано, что рыцарей не больше 8 (или, эквивалентно, лжецов не менее двух) — 3 балла.

Приведён пример, показывающий, что рыцарей могло быть 8, с верным указанием, какой человек сказал какие фразы — 4 балла.

Если в приведённом примере не полностью описана ситуация (например, не сказано, какое число загадали лжецы, или явно не указано, кто говорил какую фразу) — из 4 баллов за пример ставится не более 2 баллов.

9.3. По кругу расставлены 100 различных натуральных чисел. Вася разделил каждое из них с остатком на следующее по часовой стрелке; при этом оказалось, что остатки, полученные Васей, принимают всего два различных значения. Петя разделил каждое из чисел с остатком на следующее против часовой стрелки. Докажите, что все остатки, полученные Петей, различны. (*Н. Агаханов, С. Берлов*)

Решение. Пронумеруем числа по часовой стрелке a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} так, чтобы число a_{100} было наименьшим. Тогда остаток от деления a_{100} на a_1 будет равен $a = a_{100}$ (ибо $a_1 > a_{100}$), а остаток b от деления a_{99} на a_{100} будет меньше, чем a_{100}. Значит, $a > b$ — единственные остатки, полученные Васей.

Предположим, что $a_i < a_{i+1}$ при некотором $i < 100$. Тогда остаток от деления a_i на a_{i+1} равен a_i, что больше, чем a (и тем более — чем b). Это невозможно. Значит, $a_1 > a_2 > \ldots > a_{100}$.

Итак, Петя при делении a_{i+1} на a_i (при любом $i = 1, 2, \ldots, 99$) будет получать в остатке a_{i+1}, поскольку $a_{i+1} < a_i$. При делении же a_1 на a_{100} он получит остаток c, меньший a_{100}. Значит, все его остатки $c < a_{100} < a_{99} < \ldots < a_2$ различны.

Комментарий. Доказано, что существует единственное число, меньшее своего соседа по часовой стрелке (иначе говоря, доказано, что круг можно «разорвать» так, чтобы образовалась монотонная последовательность) — 5 баллов.

Некоторые участники могут доказать лишь, что круг разбивается на две монотонных последовательности. Если сделано только это — 2 балла.

Если дополнительно из этого факта выведено, что среди Петиных остатков хотя бы 99 различных — добавляется 1 балл.

9.4. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит на прямой BC. Докажите, что окружность Γ, описанная около треугольника ABC, касается окружности ω. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим через Γ' окружность, описанную около треугольника BHC (см. рис. 1). На касательной к Γ' в точке H отметим точку X, лежащую внутри угла BCH. Тогда $\angle BHX = \angle BCH = \angle B_1C_1H$ (последнее равенство следует из того, что $BC \parallel B_1C_1$). Значит, окружность ω касается прямой HX и окружности Γ' в точке H.

Обозначим через H' точку, симметричную H относительно прямой BC (как известно, эта точка лежит на окружности Γ). Итак, при симметрии относительно BC окружность Γ' переходит в окружность Г, а окружность ω — в себя, поскольку центр ω лежит на прямой BC. Поскольку ω касается Γ', она касается и Г, что и требовалось доказать.

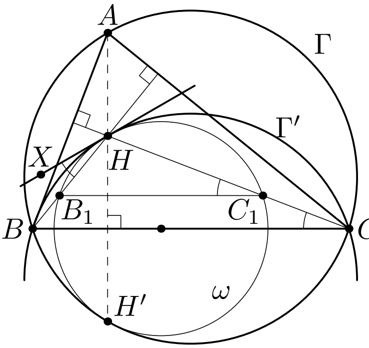

Рис. 1

9.5. Каждая грань куба $1000 \times 1000 \times 1000$ разбита на 1000^2 квадратных клеток со стороной 1. Какое наибольшее количество этих клеток можно закрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не имели общей стороны?

(*С. Долгих*)

Ответ. $3 \cdot 1000^2 - 2000 = 2\,998\,000$ клеток.

Решение. Рассмотрим произвольную закраску, удовлетворяющую условию. Разобьём все клетки поверхности на «каёмки» так, как показано на рис. 2 — по 500 каёмок вокруг каждой из восьми вершин (одна из каёмок отмечена серым). Тогда в k-й каёмке, считая от вершины, будет $S_k = 6k - 3$ клеток. Так как никакие две закрашенных клетки не могут быть соседними, в этой каёмке будет не более $\left[\frac{S_k}{2}\right] = 3k-2 = \frac{S_k - 1}{2}$ закрашенных клеток. Просуммировав по всем 4000 каёмкам и учтя, что их общая площадь равна $6 \cdot 1000^2$, получаем, что общее количество закрашенных клеток не превосходит $\frac{6 \cdot 1000^2 - 4000}{2} = 3 \cdot 10^6 - 2000$.

Осталось привести пример, показывающий, что столько клеток закрасить можно. Назовём две противоположных грани куба *верхней* и *нижней*, а остальные — *боковыми.* На каждой из боковых граней можно отметить половину клеток шахматным образом. После этого на верхней и нижней гранях можно будет также окрасить половину клеток во всех строках, кроме двух крайних, оставив их пустыми — см. рис. 3, где видны две боковых и верхняя грани. Нетрудно видеть, что при такой закраске в каждой каёмке будет максимальное возможное количество закрашенных клеток. (Вместо проверки каждой каёмки можно заметить, что вся поверхность разбивается на полоски 1×100,

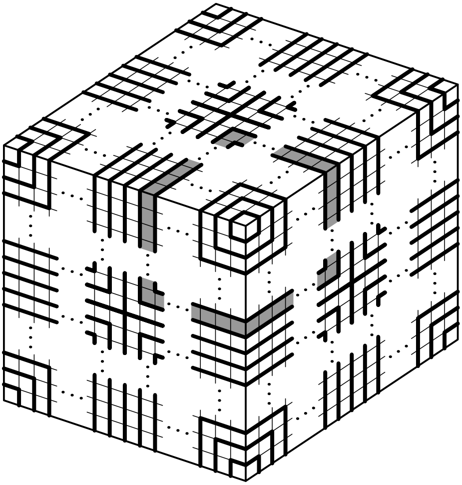

Рис. 2

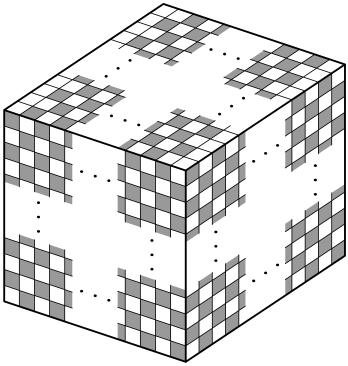

Рис. 3

четыре из которых — пустые, а в каждой из остальных закрашена ровно половина клеток.)

Замечание. Существуют и другие оптимальные примеры. В частности, в приведённом примере закраску верхней грани можно изменить так: разобьём верхнюю грань диагоналями на 4 треугольника. и в каждом из них закрасим клетки шахматным образом (так, чтобы закраска этого треугольника согласовалась с закраской соседней боковой грани).

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только приведён правильный пример закраски $N = 3 \cdot 1000^2 - 2000$ клеток — 1 балл.

Доказано только, что в любой удовлетворяющей условиям закраске не более N закрашенных клеток — 5 баллов.