11 класс

Задача 1. Докажите, что уравнение $x^2 + 2^{2018}x + 2^{2019} = 0$ не имеет целых корней.

Первое решение. Дискриминант этого уравнения равен

$$2^{4036} - 4 \cdot 2^{2019} = 2^{2021}(2^{2015} - 1)\,.$$

Для наличия целого корня необходимо, чтобы дискриминант был точным квадратом. Однако, число $2^{2021}(2^{2015} - 1)$ не является точным квадратом, так как степень вхождения двойки в любой точный квадрат чётна. $\square$

Второе решение. Предположим противное: пусть у этого уравнения есть целый корень n. Заметим, что он должен быть отрицательным, так как иначе $n^2 + 2^{2018}n + 2^{2019}$ было бы положительным. Так как

$$n^2 + 2^{2018}n + 2^{2019} = 0\,,$$

число 2^{2019} делится на n, то есть $n = -2^{\ell}$ для некоторого неотрицательного целого ℓ. Тогда $2^{2018+\ell} = 2^{2\ell} + 2^{2019}$. Если $2\ell < 2019$, то $2^{2018-\ell} = 1 + 2^{2019-2\ell}$, что невозможно, так как $1+2^{2019-2\ell}$ нечётно и больше одного. Аналогично, если $2\ell > 2019$, то $2^{\ell-1} = 2^{2\ell-2019} + 1$, что невозможно, так как $2^{2\ell-2019} + 1$ нечётно и больше одного. $\square$

Третье решение. Заметим, что при $x = -2$ левая часть уравнения положительна (равна 4), а при $x = -3$ отрицательна (равна $-2^{2018} + 9$). Значит, на промежутке $(-3; -2)$ у уравнения есть корень; он, очевидно, нецелый. Так как по теореме Виета сумма корней нашего уравнения равна -2^{2018}, второй корень тоже нецелый. $\square$

Критерии

4 б. Верное решение.

1 б. Дискриминант записан в виде произведения степени двойки на нечетное число.

Задача 2. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность ω. Диагональ AC является диаметром окружности ω. Найдите $\angle BEC$, если $\angle ADB = 20°$.

Ответ: $70°$.

Решение. Рис. 4. Так как $\angle ADB = 20°$, дуга AB равна $40°$. Так как AC — диаметр, дуга ABC равна $180°$, то есть дуга BC равна $180° - 40° = 140°$. Угол BEC опирается на дугу BC, а значит, он равен $140°/2 = 70°$. $\square$

Критерии

4 б. Верное решение.

0 б. Только правильный ответ.

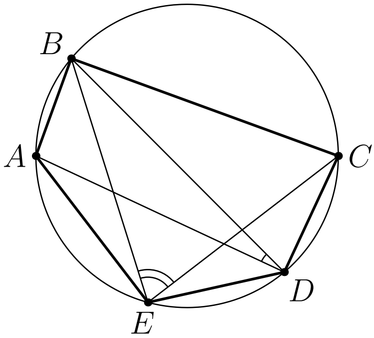
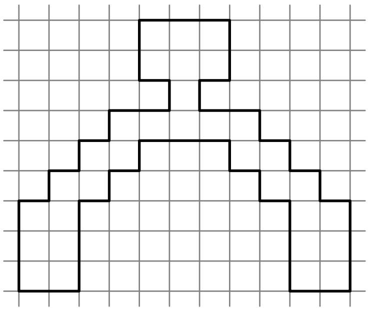


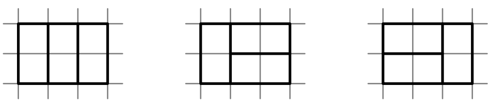
Рис. 4: к задаче 2

Задача 3. Сколькими способами можно разрезать по клеткам приведённую ниже картинку на прямоугольники 1×2 (сторона одной клетки равна 1)?

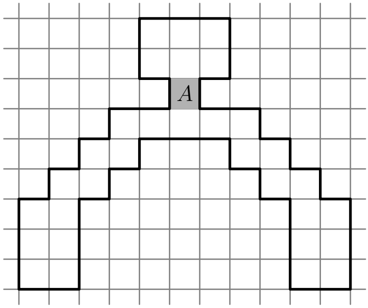


Ответ: 27.

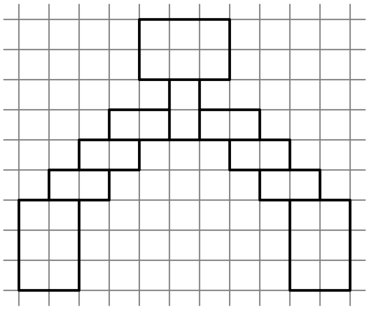
Решение. Прямым перебором можно убедиться, что количество разрезаний прямоугольника 2×3 на прямоугольники 1×2 равно трём (все три варианта приведены на рисунке ниже).



Рассмотрим клетку A:



Если A является нижней клеткой вертикального прямоугольника 1×2, то остающаяся верхняя часть фигуры имеет нечётную площадь и не может быть разрезана. Значит, A является верхней клеткой вертикального прямоугольника 1×2. Тогда следующее частичное разрезание получается однозначно:



Осталось разрезать три отдельных прямоугольника 2×3. Для каждого из них есть три разрезания, значит, для всех вместе есть $3^3 = 27$ разрезаний. □

Критерии

0 б. Только правильный ответ.

1 б. Посчитаны некоторые разрезания.

2 б. Решение перебором, но много (около половины) случаев пропущены.

3 б. При рассмотрении случаев несколько (не много!) пропущены.

4 б. Верное решение с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

4 б. Верное решение.

Задача 4. На доске написано число ноль. Петру разрешается совершать следующие операции:

- применить к одному из написанных на доске чисел тригонометрическую (sin, cos, tg или ctg) или обратную тригонометрическую (arcsin, arccos, arctg или arcctg) функцию и написать результат на доске;
- написать на доске частное или произведение двух уже написанных чисел.

Помогите Петру написать на доске $\sqrt{3}$.

Решение. Пётр может, например, совершить следующие вычисления:

- $\cos 0 = 1$;
- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$;
- $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$;
- $\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$;
- $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;
- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Замечание. К требуемому результату может приводить ещё много последовательностей операций. □

Критерии

1 б. Получено число $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{4}$.

2 б. Получены числа $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}$.

2 б. Получено число $\frac{1}{2}$.

3 б. Получено число $\frac{\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{6}$.

4 б. Верное решение.

Задача 5. На ребре AA' куба $ABCDA'B'C'D'$ с ребром длины 2 отмечена точка K. В пространстве отмечена такая точка T, что $TB = \sqrt{11}$ и $TC = \sqrt{15}$. Найдите длину высоты тетраэдра $TBCK$, опущенной из вершины C.

Ответ: 2.

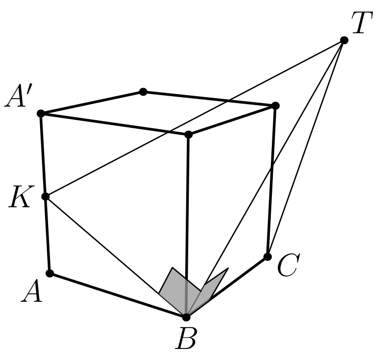


Рис. 5: к задаче 5

Решение. Заметим, что

$$TB^2 + BC^2 = 11 + 4 = 15 = TC^2\,.$$

Отсюда по обратной теореме Пифагора следует, что угол TBC прямой. Следовательно, $TB \perp BC$, то есть T лежит в плоскости грани $AA'B'B$. Значит, BC является высотой, опущенной из вершины C, а её длина равна 2.

Замечание. Существуют два возможных расположения точки T, симметричных относительно плоскости KBC. □

Критерии

4 б. Верное решение.

0 б. Только правильный ответ.

Задача 6. Внутри шляпы волшебника живут 100 кроликов: белые, синие и зелёные. Известно, что если произвольным образом вытащить из шляпы 81 кролика, то среди них обязательно найдутся три разноцветных. Какое наименьшее количество кроликов нужно достать из шляпы, чтобы среди них точно было два разноцветных?

Ответ: 61.

Решение. Докажем, что если произвольным образом вытащить из шляпы 61 кролика, то среди них найдутся два разноцветных. Предположим противное: пусть имется $a \geqslant 61$ кроликов какого-то цвета (например, белого). Пусть второй цвет по количеству кроликов — синий. Тогда в шляпе живёт хотя бы $\frac{100-a}{2}$ синих кроликов. А значит, общее количество белых и синих хотя бы

$$a + \frac{100-a}{2} = \frac{100+a}{2} \geqslant \frac{161}{2} = 80{,}5\,.$$

Так как кроликов целое число, белых и синих вместе хотя бы 81, что противоречит условию.

Покажем, что 60 кроликов может быть недостаточно. Пусть в шляпе живёт 60 белых и по 20 синих и зеленых. Тогда может получиться, что все вытащенные кролики белые. С другой стороны, если вытащить 81 кролика, то среди них точно встретятся кролики всех трёх цветов. □

Критерии

4 б. Верное решение.

3 б. Доказано, что 61 кролика хватит.

1 б. Показано, что 60 кроликов может не хватить.

0 б. Только правильный ответ.