Материалы для проведения регионального этапа

XLVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2019–2020 учебный год

Первый день

3–4 февраля 2020 г.

Москва, 2019

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, Л. А. Емельянов, Р. Г. Женодаров, П. Ю. Козлов, П. А. Кожевников, Д. Н. Крачун, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, В. С. Кулишов, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, А. Р. Сафиуллина, О. С. Смирнов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, Е. О. Холмогоров, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2019–2020 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **3 февраля 2020 г.** (I тур) и **4 февраля 2020 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2019–2020 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 3 февраля 2020 г., по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

11.1. На доске написано n различных целых чисел. Произведение двух наибольших равно 77. Произведение двух наименьших тоже равно 77. При каком наибольшем n это возможно?

(*Р. Женодаров, жюри*)

Ответ. При $n = 17$.

Решение. Числа $-11, -7, -6, -5, \ldots, 6, 7, 11$ дают пример при $n = 17$.

Допустим, что есть хотя бы 18 чисел с таким свойством. Тогда какие-то 9 из них будут одного знака (все положительны или все отрицательны). Среди этих 9 чисел модули двух наибольших будут не меньше 8 и 9 соответственно. Тогда их произведение не может быть равно 77.

Комментарий. Только доказательство того, что $n \leqslant 17$ — 5 баллов.

Только пример для $n = 17$ — 2 балла.

11.2. Множество A состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Множество B также состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B. (*Д. Храмцов*)

Решение. Предположим противное: множества A и B не пересекаются. Тогда их объединение содержит $2n$ различных натуральных чисел. Следовательно, сумма S всех элементов объединения множеств A и B будет не меньше суммы $1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n + 1)$. С другой стороны, по условию $S = 2n^2$, что меньше, чем $n(2n + 1)$. Противоречие.

Комментарий. В предположении, что множества A и B не пересекаются, получена оценка $S \geqslant 1 + 2 + \ldots + 2n$ — не менее 5 баллов (в случае дальнейшего неверного подсчёта суммы ставится 5 баллов).

11.3. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. На стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH — точка E, а на отрезке CH — точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90°$.

(*Б. Обухов*)

Решение. Построим точку E', симметричную точке E относительно стороны AC (см. рис. 3). Заметим, что точка F лежит на прямой DE', ибо $\angle DFC = \angle EFA = \angle E'FA$ в силу симметрии. Из прямоугольных треугольников ABC и BCH получаем $\angle E'BC = 90^\circ - \angle ACB = \angle BAC$.

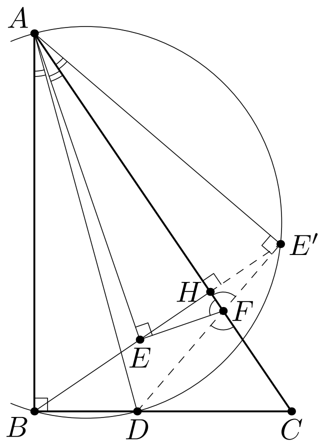

Рис. 3

Заметим, что $\angle BAD = \angle CAE = \angle CAE'$. Значит, $\angle DAE' = \angle CAE' + \angle DAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle BAC = \angle E'BC$. Это означает, что четырехугольник $ABDE'$ — вписанный. Следовательно, поскольку $\angle ABD = 90^\circ$, то $\angle AE'D = 90^\circ$. Тогда в силу симметрии $\angle AEF = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

11.4. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py+1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y. (*М. Антипов*)

Решение. Положим $p = 2k+1$. Предположим противное: для каждого из чисел $y = 1, 2, \ldots, k$ существует разложение $py + 1 = a_y b_y$, где $a_y > y$, $b_y > y$. Заметим, что каждое из чисел a_y и b_y строго больше 1, а также что $a_y < p$, $b_y < p$, иначе $a_y b_y \geqslant p(y+1) > py + 1$. Значит, каждое из $p-1$ чисел набора $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ лежит в множестве из $p-2$ чисел $\{2, 3, \ldots, p-1\}$. Таким образом, в этом наборе найдутся два равных числа. Пусть каждое из этих двух чисел равно d.

Пусть эти равные числа имеют равные индексы в наборе, то есть $a_y = b_y = d$ при некотором y. Тогда $py + 1 = d^2$, поэтому число $d^2 - 1 = (d-1)(d+1) = py$ делится на простое p. Так как $1 \leqslant d - 1 < d + 1 \leqslant p$, это может быть лишь при $d + 1 = p$. Тогда соответствующее значение y равно $d - 1 = p - 2 = 2k - 1$, что при $p > 3$ больше, чем k. Противоречие (так как $y \leqslant k$).

В противном случае существуют индексы $y_1 < y_2$ такие, что

$1 \leqslant y_1 < y_2 < d$, для которых числа py_1+1 и py_2+1 делятся на d. Тогда и $p(y_2-y_1) = (py_2+1)-(py_1+1)$ также делится на d. Из взаимной простоты чисел d и p получаем, что y_2-y_1 делится на d, а это невозможно, так как $0 < y_2-y_1 < y_2 < d$.

Таким образом, в каждом случае получено противоречие и, следовательно, указанное в условии задачи число y всегда найдётся.

Комментарий. В предположении противного доказано только, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа — 3 балла.

В предположении противного доказано, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа, и сведён к противоречию случай $y_1 < y_2$ (т. е. случай $y_1 = y_2$ упущен или разобран неверно) — 5 баллов.

В предположении противного доказано, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ есть два равных числа, и сведён к противоречию случай $y_1 = y_2$ (т. е. случай $y_1 < y_2$ упущен или разобран неверно) — 5 баллов.

11.5. В таблице $N \times N$ расставлены все натуральные числа от 1 до N^2. Число назовём *большим*, если оно наибольшее в своей строке, и *малым*, если оно наименьшее в своём столбце (таким образом, число может быть и большим, и малым одновременно, а может не быть ни тем, ни другим). Найдите наименьшую возможную разность между суммой всех больших чисел и суммой всех малых чисел. (*С. Токарев*)

Ответ. $\dfrac{N(N-1)(2N+5)}{6}$.

Решение. Заметим, что число N^2 большое, а 1 — малое, их разность равна N^2-1. Вычеркнем строку, содержащую N^2, и столбец, содержащий 1. Тогда, если A и B — наибольшее и наименьшее из оставшихся $(N-1)^2$ чисел, то $A-B \geqslant (N-1)^2-1$. При этом A не больше большого числа своей строки (в исходной таблице), а B — не меньше малого числа своего столбца, так что разность этих большого и малого числа также не меньше, чем $(N-1)^2-1$. Снова вычеркнем строку, содержащую A и столбец, содержащий B, и повторим рассуждения.

Продолжая так дальше, получим, что интересующая нас разность S не меньше, чем $N^2 - 1 + (N-1)^2 - 1 + \ldots + 1^2 - 1$. Используя формулу суммы квадратов первых N натуральных чисел, получим $S \geqslant N(N-1)(2N+5)/6$.

Осталось доказать, что оценка достигается. Построим соответствующий пример индукцией по N. База при $N = 1$ очевидна. Для перехода рассмотрим (уже построенный) пример таблицы $(N-1) \times (N-1)$ и увеличим все числа в нём на $N-1$ (получились числа от N до $N(N-1)$, а разность S не изменилась). Дополним эту таблицу новой строкой и новым столбцом; в новой строке расставим числа $N^2-N+1, N^2-N+2, \ldots, N^2$, а в оставшихся клетках нового столбца — числа $1, 2, \ldots, N-1$. Нетрудно видеть, что числа, бывшие большими и малыми в прежней таблице, такими и остались, и добавились большое число N^2 и малое число 1. Значит, S увеличилась на $N^2 - 1$, что и требовалось.

Комментарий. Доказано лишь, что $S \geqslant N(N-1)(2N+5)/6$ — 5 баллов.

Построен пример для $S = N(N-1)(2N+5)/6$ — 2 балла.

Ответ выражен через сумму квадратов — баллы не снимать.