Материалы для проведения заключительного этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Второй день

Тюмень, 17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

10 класс

10.5. Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что учительница сможет победить. (*М. Дидин, А. Кузнецов*)

Решение. Учительница выберет квадрат K размера 100×100 и будет закрашивать отрезки его границы, если это возможно. Пусть перед n-м её ходом все эти отрезки закрашены. Тогда $n \leqslant 401$, поскольку всего на границе 400 отрезков. К этому моменту всего закрашено не более чем $30 \cdot 400$ отрезков, поэтому хотя бы один отрезок внутри квадрата K не закрашен. Каждым следующим ходом учительница будет закрашивать один из отрезков внутри K. Спустя несколько ходов все отрезки внутри K будут закрашены. Тогда перед ходом игрока, который закрасит последний из таких отрезков, найдется искомый прямоугольник 1×2, и учительница победит.

10.6. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 1$ с вещественными коэффициентами. Известно, что уравнение $P(P(P(x))) = P(x)$ имеет ровно n^3 различных вещественных корней. Докажите, что эти n^3 корней можно разбить на две группы с равными средними арифметическими. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что $P(P(P(t))) = P(t)$ в том и только в том случае, когда $P(t)$ — корень многочлена $P(P(x)) - x$. В частности, у этого многочлена есть корни, обозначим их $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Поскольку $n > 1$, то степень многочлена $P(P(x)) - x$ равна n^2, поэтому $k \leqslant n^2$. Таким образом, все корни уравнения $P(P(P(x))) = P(x)$ — в точности корни многочленов $P(x) - x_1, P(x) - x_2, \ldots, P(x) - x_k$. Все эти многочлены — степени n, поэтому у каждого из них не более n корней. Итого, уравнение $P(P(P(x))) = P(x)$ имеет не более kn корней, но по условию их n^3. Это возможно лишь в случае, когда каждый из многочленов $P(x)-x_1, P(x)-x_2, \ldots, P(x)-x_k$ имеет n различных вещественных корней и $k=n^2$. У этих многочленов коэффициенты при x^n одинаковы и коэффициенты при x^{n-1} одинаковы. Тогда по теореме Виета суммы их корней равны. Следовательно, если корни первого многочлена определить в одну группу, а корни остальных — в другую, то все корни уравнения $P(P(P(x)))=P(x)$ разобьются на две группы с равными средними арифметическими.

10.7. Натуральные числа $n>20$ и $k>1$ таковы, что n делится на k^2. Докажите, что найдутся натуральные a, b и c такие, что $n=ab+bc+ca$. (*А. Храбров*)

Решение. Заметим, что из равенства $n+a^2=(a+b)(a+c)$ следует равенство $n=ab+bc+ca$. Поэтому для решения задачи достаточно найти такое натуральное a, что число $n+a^2$ раскладывается в произведение двух натуральных чисел x и y, больших a (тогда можно положить $b=x-a$ и $c=y-a$). Согласно условию, $n=\ell p^2$ для некоторых простого p и натурального ℓ.

Если $\ell+1>p$, то в силу разложения $n+p^2=(\ell+1)\cdot p^2$ в качестве a можно взять число p. Также, если число $\ell+1$ — составное, то $\ell+1=st$ при $s,t>1$; тогда снова можно положить $a=p$, так как $n+p^2=(\ell+1)p^2=sp\cdot tp$.

В оставшемся случае имеем $n=(q-1)p^2$ при некоторых простом $q\leqslant p$. Если $p>q$, то $p=mq+r$ при некотором положительном $r<q$ и натуральном m. Тогда число

$$n+r^2=(q-1)(r+mq)^2+r^2=q(p+mq)^2-mq(2r+mq)$$

делится на q, а частное от деления больше r, поскольку $n=(q-1)p^2>1\cdot q\cdot r$. Поэтому можно положить $a=r$.

Наконец, если $p=q$, то $n=p^3-p^2$, причём $p\geqslant 5$ по условию. Тогда $n+6^2=p^3-p^2+36=(p+3)(p^2-4p+12)$, где обе скобки больше 6; в этом случае работает $a=6$.

Замечание. Несложно показать, что в виде $ab+bc+ca$ можно представить все натуральные числа n, для которых число $n+1$ составное, — в частности, все нечетные числа, отличные от 1. С помощью этого наблюдения и калькулятора несложно найти первые 18 чисел, не представимых в виде $ab+bc+ca$ (все они меньше пятисот). В статье Борвейна и Чоя утверждается, что количество чисел, не представимых в виде $ab+bc+ca$, не более 19, и существование девятнадцатого такого числа противоречило бы обобщенной гипотезе Римана (которая в настоящий момент не является ни доказанной, ни опровергнутой).

10.8. В окружность ω вписан пятиугольник $ABCDE$. Прямая CD пересекает лучи AB и AE в точках X и Y соответственно. Отрезки EX и BY пересекаются в точке P и вторично пересекают окружность ω в точках Q и R. Точка A' симметрична точке A относительно прямой CD. Окружность γ, описанная около треугольника PQR, пересекает окружность, описанную около треугольника $A'XY$, в двух точках. Докажите, что их можно назвать M и N так, чтобы прямые CM и DN пересекались на окружности γ. *(М. Дидин, А. Кузнецов)*

Решение. Заметим, что точка P лежит внутри окружности (QDR), и четырехугольник $PQDR$ — выпуклый. Значит, точка D лежит внутри окружности (PQR). При этом точка Y лежит вне окружности (PQR). Следовательно, окружность (PQR) вторично пересекает окружность (DRY) в некоторой точке N_1, которая лежит на дуге DY, не содержащей точку R. В частности, N_1 лежит в другой полуплоскости от прямой CD, нежели точка A.

Заметим, что $\angle N_1QP = \angle N_1RY = \angle N_1DY$. Следовательно, $\angle XQN_1 = \angle XDN_1$, поэтому точка N_1 лежит на окружности (XQD). Кроме того, $\angle XN_1Y = \angle XN_1D + \angle DN_1Y = \angle PQD + \angle DRP = \angle EAD + \angle DAB = \angle YAX = \angle XA'Y$. Второе равенство следует из вписанности четырехугольников $XQDN_1$ и $YRDN_1$, третье — из равенств вписанных углов в окружности (ABC), а последнее выполнено, поскольку точки A и A' симметричны относительно XY. Таким образом, $\angle XN_1Y = \angle XA'Y$, поэтому точка N_1 лежит на окружности $(A'XY)$

Пусть M_1 — вторая точка пересечения окружностей (PQR) и (XQC). Рассуждая аналогично, мы получаем, что M_1 лежит на окружностях (CRY) и $(A'XY)$ и в другой полуплоскости относительно CD, нежели A. Отметим, что $M_1 \neq N_1$. Иначе точка N_1 лежала бы и на окружности (CRY), и на окружности

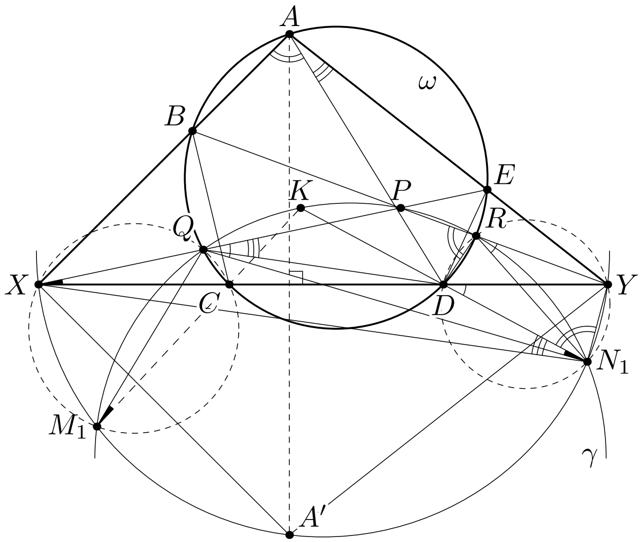

Рис. 4

(DRY) что невозможно. Таким образом, M_1 и N_1 — две точки пересечения окружностей (PQR) и $(A'XY)$.

Назовем $M = M_1$, $N = N_1$. Пусть прямая DN вторично пересекает γ в точке K. Тогда $\angle QMK = \angle QNK = \angle QND = \angle QXD = \angle QMC$, откуда следует, что точки M, C, K лежат на одной прямой. Значит, прямые CM и DN пересекаются на окружности γ, что и требовалось.

ВсОШ-2021 по математике. 10 класс, критерии

апрель 2021

Задача 10.5

[3 б.] Только доказана **лемма** о том, что если есть покрашенный контур, внутри которого есть непокрашенные отрезки, то учительница может выиграть.

Во в целом верном решении с покраской большого контура снижаются баллы за недочеты:
[−1 б.] Не приведена оценка, показывающая, что школьники не успеют закрасить все отрезки внутри, или в подсчете количества перегородок имеется ошибка.
[−1 б.] Имеется пробел в доказательстве леммы; например, нигде не сказано, что учительница должна красить отрезок внутри контура.

Задача 10.6

Общая часть

[+1 б.] Доказано, что у $P(P(x)) - x$ есть n^2 корней, либо что $P(P(x)) - x$ делит $P(P(P(x))) - P(x)$;

[≤ 4 б.] что-то из предыдущего используется, но не доказано — не более 4 баллов.

[≤ 3 б.] решение опирается на значения двух старших коэффициентов многочленов $P(P(P(x))) - P(x)$ или $P(P(x)) - x$, но они не вычислены верно — не более 3 баллов.

Решение 1 — через выделение в группу корней $P(x) = t$, где $P(P(t)) = t$

Эта часть критериев применяется, если указано, что в группу выделяются корни $P(x) = t$, где $P(P(t)) = t$, и указано, что сумма или среднее корней в такой группе зависят только от коэффициентов $P(x)$. Решение считается в целом верным, если, кроме этого, доказано, что у $P(P(t)) - t$ есть n^2 корней, и для каждого t у $P(x) - t$ есть n корней.

Во в целом верном решении снижаются баллы за недочеты:
[−1 б.] ошибки в подсчёте среднего арифметического, связанные с количеством корней в группах или с количеством групп;
[−1 б.] используется неверная формулировка теоремы Виета, не влияющая существенно на ход решения (например, неверный знак).

Решение 2 — через выделение в группу корней $P(P(x)) - x$

Эта часть критериев применяется, только если в работе явно рассматривается многочлен $P(P(x)) - x$.

Частичные продвижения (суммируются друг с другом и с общей частью):
[+1 б.] корни многочлена $P(P(x)) - x$ выделяются в группу.
[+4 б.] найдены два старших коэффициента многочленов $P(P(x)) - x$ и $P(P(P(x))) - P(x)$.

Во в целом верном решении снижаются баллы за недочет:
[−1 б.] используется неверная формулировка теоремы Виета, не влияющая существенно на ход решения (например, неверный знак).

<u>Другие продвижения</u>

Не суммируются с остальными и друг с другом.

[2 б.] найдено среднее арифметическое всех корней многочлена $P(P(P(x))) - P(x)$.

[5 б.] задача решена для n > 2 (например, аналогично решению 2 выделены в группу корни $P(x) - x$).

Задача 10.7

В отрыве от верного решения не оцениваются следующие продвижения:

[0 б.] разбор случая нечетного n;

[0 б.] разбор случая n, кратного 4;

[0 б.] разбор случая, когда n — точный квадрат;

[0 б.] сведение к случаю простого k;

[0 б.] неполный перебор остатков при делении n на любое конкретное натуральное число.

[0 б.] замечено тождество $ab + bc + ac = (a + c)(b + c) - c^2$.

Частичные продвижения (не суммируются друг с другом):

[1 б.] (II а) разбор случая, когда $n + 1$ составное;

[1 б.] (II б) разбор случая, когда $n = dk^2$ и $d + 1$ составное;

[1 б.] (II в) разбор случая, когда k составное;

[2 б.] (III а) Разбор случая, когда $n = dk^2$ и $d \geq k$;

[1 б.] (III б) то же для случая $d \geq k^2$.

[≤ 4 б.] (IV) Решение, в котором не разобран случай $n = (p - 1)p^2$ с простым p, оценивается не более, чем 4 баллами. Если всё, кроме этого случая, разобрано полностью, решение оценивается 4 баллами.

Задача 10.8

[0 б.] Не оцениваются в отрыве от верного решения начальные замечания, такие как применение инверсии и счет углов.

[3 б.] Задача сведена к вписанности $CQXM$ и $RYDN$.