Материалы для проведения заключительного этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Первый день

Тюмень,
17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

10 класс

10.1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F, причём E лежит между B и F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямые AE и DF касаются окружности, описанной около треугольника AOD. Докажите, что они касаются и окружности, описанной около треугольника EOF.

(*А. Кузнецов*)

10.2. Найдите все наборы натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ такие, что

$$x_{i+2}^2 = \text{НОК}(x_{i+1}, x_i) + \text{НОК}(x_i, x_{i-1})$$

при $i = 1, 2, \ldots, 20$, где $x_0 = x_{20}, x_{21} = x_1, x_{22} = x_2$. (*П. Козлов*)

10.3. В стране N городов. Некоторые пары городов связаны двусторонними авиалиниями, каждая пара не более, чем одной. Каждая авиалиния принадлежит одной из k компаний. Оказалось, что из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками), но при закрытии всех авиалиний любой из компаний это свойство нарушается. Какое наибольшее количество авиалиний (при произвольных данных N и k) могло быть в этой стране? (*С. Берлов, Н. Власова*)

10.4. Дано натуральное число $n \geqslant 4$ и $2n+4$ карточки, пронумерованные числами $1, 2, \ldots, 2n+4$. На карточке с номером m написано вещественное число a_m, причем $[a_m] = m$. Докажите, что можно выбрать 4 карточки так, чтобы сумма чисел на первых двух карточках отличалась от суммы чисел на двух других карточках менее чем на $\dfrac{1}{n - \sqrt{n/2}}$. (*А. Кузнецов*)