Материалы для проведения заключительного этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Второй день

Тюмень, 17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

11 класс

11.5. Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Смогут ли ученики помешать учительнице победить?

(*М. Дидин, А. Кузнецов*)

11.6. В тетраэдре $SABC$ длины всех шести рёбер различны. Точка A' в плоскости SBC симметрична точке S относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC. Точка B' в плоскости SAC и точка C' в плоскости SAB определяются аналогично. Докажите, что плоскости $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ и ABC имеют общую точку. (*А. Кузнецов*)

11.7. Найдите все перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$ чисел $1, 2, \ldots, 2021$ такие, что при любых натуральных m, n, удовлетворяющих условию $|m - n| > 20^{21}$, выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{2021} \text{НОД}(m + i, n + a_i) < 2|m - n|.$$

(*Перестановка* $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$ — это последовательность, в которой каждое из чисел $1, 2, \ldots, 2021$ встречается ровно по одному разу.) (*П. Козлов*)

11.8. У каждой из 100 девочек есть по 100 шариков; среди этих 10000 шариков есть по 100 шариков 100 различных цветов. Две девочки могут обменяться, передав друг другу по шарику. Они хотят добиться того, чтобы у каждой девочки было по 100 разноцветных шариков. Докажите, что они могут добиться этого такой серией обменов, чтобы любой шарик участвовал не более чем в одном обмене. (*И. Богданов, Ф. Петров*)