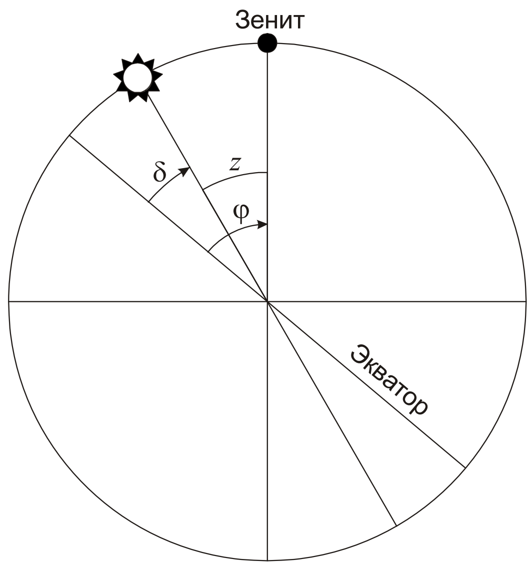
Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Региональный этап - 2021 г.

<u>9 класс</u>

1. Условие. На каких широтах на Земле верхняя кульминация видимого центра Солнца может происходить на зенитном расстоянии 30°? Атмосферную рефракцию не учитывать. *(Е.Н. Фадеев)*

1. Решение. Зенитное расстояние светила в верхней кульминации равно

$$z = |\varphi - \delta|,$$



где φ − широта места, δ − склонение светила. Из условия задачи мы имеем:

$$|\varphi - \delta| = 30°;$$
$$\varphi = \delta - 30° \text{ или } \varphi = \delta + 30°.$$

Склонение центра Солнца может принимать значения от −ε до +ε, где угол ε (23.5°) есть наклон экватора к эклиптике. Отсюда мы получаем интервалы широт на Земле, удовлетворяющих условию задачи:

$$\varphi \in [-\varepsilon - 30°; \varepsilon - 30°] = [-53.5°; -6.5°];$$
$$\varphi \in [-\varepsilon + 30°; \varepsilon + 30°] = [+6.5°; +53.5°].$$

1. Система оценивания. Выше приведено общее решение задачи. При выполнении этим методом решение разделяется на следующие этапы:

Этап 1. Запись выражения для зенитного расстояния светила в общем виде − 4 балла.
Этап 2. Раскрытие знака модуля, проведение вычислений и получение двух интервалов − 4 балла, из которых по 2 балла выставляется за рассмотрение каждого из двух случаев (1 балл − запись формулы, 1 балл − ответ). В качестве величины наклона экватора к эклиптике участник может брать 23.5°, как сделано выше, либо целое значение 23° или более точное 23.4°, что изменяет ответ менее, чем на 0.5°, и на оценку не влияет.

Решение может также выполняться иными способами. Весьма распространенным может быть решение, начинающееся с рассмотрения случая северного полушария, верхней кульминации Солнца на юге и формулы $z = \varphi - \delta$. Такая запись является верной для одного из случаев и оценивается в 2 балла. В случае дальнейших верных выкладок участник должен приходить к интервалу широт от +6.5° до +53.5°, и тогда ему выставляется еще 2 балла. Оставшиеся 4 балла выставляются за отдельное правильное рассмотрение случая южного полушария либо за указание, что там ситуация будет аналогичной, и запись интервала от −53.5° до −6.5°.

Возможное неточное решение: участник олимпиады может определить северную границу интервала выполнения условия, +53.5°, соответствующую летнему солнцестоянию, и далее записать в качестве ответа весь интервал широт [−53.5°, +53.5°], не рассмотрев ситуацию вблизи экватора. Фактически, он получит ответ на вопрос − на каких широтах на Земле Солнце может в принципе располагаться на зенитном расстоянии 30°, не обязательно в кульминации. Подобное решение оценивается в 4 балла, по 2 балла за верное определение каждой из двух границ этого широкого интервала.

2. Условие. Жители Земли решили перенести часть земной атмосферы на Луну так, чтобы атмосферное давление на поверхности Луны было равно современному значению атмосферного давления на уровне моря на Земле. Какую часть атмосферы Земли (в процентах по массе) нужно для этого переместить на Луну? Считать толщину атмосферы существенно меньшей радиусов Земли и Луны, потери атмосферного вещества на Луне не учитывать. *(О.С. Угольников)*

2. Решение. Атмосферное давление у поверхности небесного тела есть вес столба атмосферы единичной площади. Так как толщина атмосферы значительно меньше радиуса тела, то атмосфера с полной массой m будет оказывать давление

$$p = \frac{mg}{4\pi R^2}.$$

Здесь R − радиус небесного тела, g − ускорение свободного падения у его поверхности. Предположим, у Луны появилась атмосфера с давлением p, равным современному атмосферному давлению у поверхности Земли. Тогда для Луны (индексы "L") и Земли (индексы "E") должно выполняться соотношение:

$$\frac{m_L g_L}{R_L^2} = \frac{m_E g_E}{R_E^2}.$$

Учитывая, что $g \sim M/R^2$, мы получаем соотношение для масс атмосфер Луны (гипотетической) и Земли (настоящей):

$$\frac{m_L}{m_E} = \frac{g_E R_L^2}{g_L R_E^2} = \frac{M_E R_L^4}{M_L R_E^4} = 0.45.$$

Здесь M_E и M_L − массы Земли и Луны. Итак, реализация задуманной идеи потребовала бы переноса на Луну 45% массы атмосферы Земли.

2. Система оценивания. Задание может решаться разными способами, определение соотношения масс атмосфер должно учитывать два главных фактора, влияющих на давление и различающихся для Земли и Луны: площадь поверхности небесного тела и ускорение свободного падения. Правильный учет каждого из них оценивается по 3 балла, еще 2 балла выставляется за наличие правильного ответа (с точностью ±5% массы атмосферы Земли).

В качестве неточных решений могут встречаться варианты учета только одного из двух факторов. Например, если считать, что давление определяется только ускорением свободного падения, тогда получается, что даже всей атмосферы Земли не хватило бы для создания требуемой атмосферы на Луне, понадобилась бы в 6 с лишним раз большая масса. И, наоборот, если считать, что давление не зависит от ускорения свободного падения, а определяется лишь массой атмосферы, то для создания лунной атмосферы потребовалось бы всего 7.5% массы атмосферы Земли. Оба таких варианта не могут быть оценены выше 3 баллов.

Еще одна неточность может быть связана с предполагаемой участниками зависимостью давления от температуры. В частности, они могут считать, что $p \sim T$, и для атмосферы Луны может потребоваться большая масса из-за меньшей температуры. Членам жюри необходимо внимательно проверять такие решения, так как температура атмосферы может фигурировать как промежуточный параметр, что не является ошибкой. Но если итоговый ответ так или иначе зависит от температуры (в частности, он изменяется, если искусственно задать другое значение температуры атмосферы Земли и Луны, оставаясь в пределах предположения о малой толщине атмосферы по сравнению с радиусом Луны), итоговая оценка не может превышать 5 баллов и далее понижается до 4 баллов, если ответ оказывается вне интервала 40-50%, и до 3 баллов (вне интервала 30-60%).

Участник олимпиады может не разобраться в условии и определить долю массы атмосферы Земли, которую нужно перенести на Луну, чтобы атмосферное давление на Луне сравнялось с новым - уменьшенным - атмосферным давлением на Земле. Правильный ответ на такую задачу составляет 31%. Подобное решение в случае правильного выполнения оценивается в 6 баллов (по 3 балла за учет каждого из двух факторов, определяющих атмосферное давление), оценка уменьшается в случае ошибок по схеме, описанной выше.

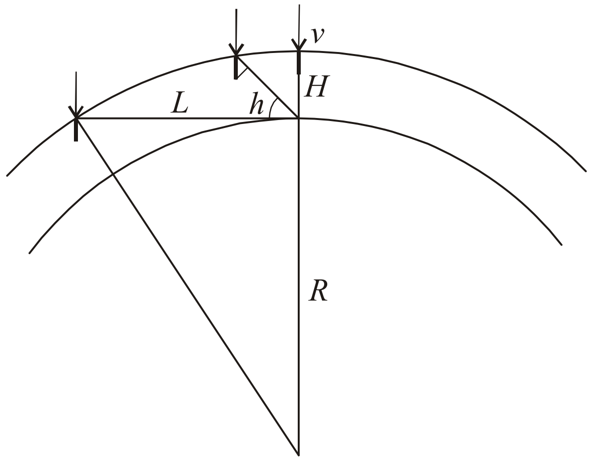
3. Условие. Метеорный рой движется на расстоянии 1 а.е. от Солнца с гелиоцентрической скоростью 42 км/с в точности навстречу Земле. В некоторой точке Земли радиант потока располагается в зените. Определите видимые угловые скорости метеоров (в градусах в секунду) у горизонта и на высоте 45° над ним, считая их высоту равной 100 км. Атмосферную рефракцию и ускорение метеорных тел притяжением Земли не учитывать. *(О.С. Угольников)*

3. Решение. Земля движется по орбите вокруг Солнца с круговой скоростью

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{a}} \approx 30 \text{ км/с}.$$

Здесь M − масса Солнца, a − радиус орбиты Земли. По условию задачи, метеорные тела движутся навстречу Земле со скоростью 42 км/с. Таким образом, геоцентрическая скорость метеоров v составляет 72 км/с. В описанном в условии пункте Земли радиант потока находится в зените, то есть метеоры летят параллельно линии, идущей из этого пункта в центр Земли.

Если метеор наблюдается на достаточно большой высоте h над горизонтом, то его угловую скорость можно найти, пренебрегая кривизной Земли. Тангенциальная скорость метеора равна $v\cos h$, а расстояние до него − $H/\sin h$, где H есть высота метеора. Видимая угловая скорость метеора будет равна



$$\omega = \frac{v \sin h \cos h}{H} = \frac{v \sin 2h}{2H}.$$

Если высота h равна 45°, то угловая скорость метеора есть $v/2H$, что равно 0.36 рад/с или 21°/с. Можно обратить внимание, что это максимальная угловая скорость метеоров при радианте, расположенном в зените. Для малых высот метеоров над горизонтом подобная простая модель неприменима. Если метеор виден у самого горизонта, то его скорость перпендикулярна лучу зрения и тангенциальная скорость равна v. Расстояние до метеора равно

$$L = \sqrt{(R+H)^2 - R^2} \approx \sqrt{2RH} = 1130 \text{ км.}$$

Угловая скорость метеора на горизонте составит

$$\omega_{\text{Н}} = \frac{v}{\sqrt{2RH}} = 0.064 \text{ рад/с} = 3.7\,^{\circ}/\text{с}.$$

Система оценивания. Выше приведено наиболее простое и при этом достаточное по точности решение задания. Участники могут выполнять решение более сложным образом, что не влияет на оценку, если усложнение не приводит к появлению ошибок.

1 этап решения − определение геоцентрической скорости метеоров − 2 балла. Оценивается только в случае правильного значения − 72 км/с с точностью до 1 км/с. Если участник получает неверное значение или путает геоцентрическую скорость с гелиоцентрической (42 км/с), то данные 2 балла не выставляются, но последующие этапы оцениваются в полной мере. В последнем случае в качестве ответов должны быть получены значения угловых скоростей 12°/с и 2.1°/с.

Участники олимпиады могут пытаться учитывать вклад осевого вращения Земли. Оно имеет скорость не более 0.46 км/с и в указанной точке будет перпендикулярно геоцентрической скорости метеоров. Тем самым, оно никак не скажется на видимой скорости метеоров, в чем можно убедиться из теоремы Пифагора. Правильный учет осевого вращения Земли или вывод о его несущественности не изменяет оценку за этап, при существенном изменении скорости за счет этого эффекта оценка снижается в соответствии с критериями, описанными выше.

2 этап решения − 3 балла − определение угловой скорости метеора на высоте 45° над горизонтом. Ее можно вычислять с учетом сферичности Земли, что практически не повлияет на ответ (разница порядка 0.1°/с). Требуемая точность − 1°/с, при ошибке до 3°/с оценка

снижается на 1 балл, при больших ошибках этап не засчитывается (ошибки на предыдущем этапе здесь не учитываются). Если ответ записывается в других единицах (например, в радианах в секунду) − оценка уменьшается на 1 балл, так как требуемые единицы указаны в условии.

3 этап решения − 3 балла − определение угловой скорости метеора на горизонте. Расстояние до метеора L может определяться как приближенно, так и точно, что не влияет на ответ в пределах требуемой точности − 0.5°/с. При ошибке до 1°/с оценка снижается на 1 балл, при больших ошибках этап не засчитывается. Если ответ записывается в других единицах (например, в радианах в секунду) − оценка уменьшается на 1 балл, аналогично второму этапу.

4. Условие. Планета обращается вокруг звезды по круговой орбите с периодом ровно 10 лет, в ее небе звезда имеет угловой диаметр ровно 10′ (десять угловых минут). Найдите среднюю плотность звезды. *(О.С. Угольников)*

4. Решение. Пусть масса звезды равна M, расстояние от звезды до планеты − L. Тогда период обращения по круговой орбите с первой космической скоростью v составит

$$T = \frac{2\pi L}{v} = \frac{2\pi L^{3/2}}{\sqrt{GM}}.$$

Видимый угловой диаметр звезды δ равен $2R/L$ радиан, где R − радиус звезды. Тогда $L=2R/\delta$. Учтем это и выразим массу звезды через ее радиус и плотность ρ:

$$T = \frac{4\sqrt{2}\pi R^{3/2}}{\delta^{3/2}\sqrt{4\pi G\rho R^3/3}} = \frac{2\sqrt{6\pi}}{\delta^{3/2}\sqrt{G\rho}}.$$

Отсюда находим плотность звезды:

$$\rho = \frac{24\pi}{GT^2\delta^3} = 470\ \text{кг/м}^3.$$

4. Система оценивания. Основными этапами решения являются:

1. Связь периода обращения планеты с массой звезды и расстоянием до нее (через первую космическую скорость или III закон Кеплера) − 2 балла. При численных ошибках в коэффициентах данный этап не засчитывается полностью, но это не влияет на оценки за другие этапы. При ошибках в размерности этап не засчитывается полностью, а другие этапы засчитываются не более, чем на 50%.

2. Формулировка (или прямое использование в дальнейших выкладках) связи углового диаметра звезды с пространственным радиусом и расстоянием до нее. Этап оценивается в 2 балла. В случае ошибок (в частности, подстановки диаметра вместо радиуса) этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере.

3. Подстановка связи плотности звезды с ее массой и радиусом − 2 балла. При численных ошибках в коэффициентах этап не засчитывается, но другие оцениваются в полной мере.

4. Вычисление плотности звезды − 2 балла. Требуемая точность − 20% без учета ошибок, сделанных на предыдущих этапах.

Возможен иной способ выполнения решения, который предусматривает использование простой формулировки III закона Кеплера, чтобы из периода обращения планеты с заданным угловым диаметром звезды получить значение периода обращения вдоль поверхности звезды, предполагая такое движение возможным. Такой период получается равным 4.9 часа. Данная операция эквивалентна выполнению первых двух этапов приведенного выше решения, всего 4 балла. Далее участники могут вывести или применить как известную формулу связи плотности центрального тела и времени его облета по низкой круговой орбите (2 балла) и, наконец, определить плотность звезды (2 балла).

Участники могут выполнять решение не в абсолютном виде, а сравнивая звезду с Солнцем, а планету − с Землей. В этом случае возможно определить плотность звезды сначала в единицах плотности Солнца, а затем и абсолютную величину плотности. Подобный метод при условии корректного выполнения засчитывается. Похожий способ решения состоит в указании, что период обращения планеты определяется исключительно средней плотностью пространства в сфере, ограниченной ее орбитой, вне зависимости от массы звезды. Далее участники могут предположить, что масса звезды равна массе Солнца, и определить, что Солнце с орбиты с периодом в 10 лет (радиус 4.64 а.е.) имело бы угловой диаметр 6.9′. Таким образом, плотность звезды равна плотности Солнца, умноженной на фактор $(6.9/10)^3$, что приводит нас к правильному ответу. При наличии обоснований такой способ решения также является верным.

5. Условие. Небольшое рассеянное скопление состоит из 40 одинаковых звезд и имеет общий блеск 8^m. Какой должен быть диаметр объектива телескопа, чтобы в него можно было увидеть отдельные звезды скопления? *(О.С. Угольников)*

5. Решение. По формуле Погсона определим звездную величину отдельной звезды скопления:

$$m = 8 + 2.5 \lg 40 = 12.$$

Если зрачок человеческого глаза с диаметром d способен замечать звезды до величины m_0=6, то при использовании телескопа с диаметром объектива D предельная звездная величина составит

$$m = m_0 + 5 \lg (D/d).$$

Отсюда мы получаем выражение для диаметра объектива телескопа, необходимого для наблюдения отдельных звезд скопления:

$$D = d \cdot 10^{0.2(m-m_0)} \approx d \cdot 16.$$

Полагая диаметр зрачка глаза d=6 мм, получаем величину D~10 см.

5. Система оценивания. Первым этапом решения задания является нахождение звездной величины отдельной звезды скопления. Ее достаточно определить с точностью до целого значения, при ошибках более 0.5^m (как сделанных в явном виде, так и следующих из используемых неверных формул) этап не засчитывается вне зависимости от характера ошибки, последующие оцениваются в полной мере при условии правильного выполнения, соответствующего полученной звездной величине. Правильное выполнение этапа оценивается в 3 балла. Участники могут не записывать численное значение звездной величины *m*, а использовать далее ее формульную запись. В этом случае оценка за этап определяется правильностью этой записи.

На следующем этапе производится вычисление диаметра объектива телескопа. Правильное формульное соотношение диаметров телескопа и зрачка оценивается в 3 балла. При ошибке в коэффициенте перед lg(D/d) (например, значение 2.5 вместо 5) эти 3 балла не выставляются, но необходимо учитывать, что возможна запись формулы со слагаемым $2.5\lg(D^2/d^2)$, которая является правильной.

Наконец, вычисление диаметра оценивается еще в 2 балла, при этом можно использовать значения диаметра зрачка глаза от 5 до 8 мм, что дает значения диаметра объектива от 8 до 13 см. При значениях диаметра зрачка от 4 до 5 мм и от 8 до 10 мм оценка снижается на 1 балл.

6. Условие. Даны координаты и собственные движения звезд из созвездия Орел на текущий момент. Задано полное собственное движение и позиционный угол его направления, отсчитываемый от направления на Северный полюс мира против часовой стрелки. Нарисуйте на графике положение этих звезд в настоящий момент и 40000 лет назад, как могли бы их видеть последние неандертальцы. Найдите угловое расстояние между звездами α и β Орла 40000 лет назад с точностью 0.1°. Изменение системы координат, связанное с прецессией оси вращения Земли, не рассматривайте. *(Е.Н. Фадеев)*

Требования к графику: Построение проводятся на выданной вам миллиметровой бумаге. Масштаб по обеим осям составляет 10 угловых минут на миллиметр (малое деление на миллиметровой бумаге). Текущее положение звезд обозначайте кружком (•) и подпишите соответствующей греческой буквой справа, прошлое – крестиком (+) и соответствующей буквой слева. Направление вверх на графике должно совпадать с современным направлением на Северный полюс мира.

Звезда	Прямое восхождение, α	Склонение, δ	Собственное движение, μ, $10^{-3}{}''$/год	Позиционный угол, γ, °
α	19ч 50.8м	+08°52′	660	53.7
β	19ч 55.3м	+06°24′	485	175.4
δ	19ч 25.5м	+03°07′	268	72.1
ζ	19ч 05.4м	+13°52′	88	183.0
θ	20ч 11.3м	–00°49′	40	81.4
λ	19ч 06.2м	–04°53′	91	191.9

6. Решение. Созвездие Орла – экваториальное, в чем можно убедиться по координатам его звезд. Вблизи небесного экватора координатную сетку можно считать прямоугольной. Тогда изменения координат будут происходить линейно:

$$\alpha = \alpha_0 + \mu_\alpha \cdot t / \cos\delta_0;$$
$$\delta = \delta_0 + \mu_\delta \cdot t;$$

Здесь μ_α и μ_δ – собственные движения соответственно по прямому восхождению и склонению. Они могут быть получены из полного собственного движения μ и позиционного угла γ:

$$\mu_\alpha = \mu\cdot\sin\gamma;$$
$$\mu_\delta = \mu\cdot\cos\gamma.$$

Здесь отражено, что позиционный угол отсчитывается от направления на север (μ_α=0, μ_δ>0) против вращения часовой стрелки (в область μ_α>0). Мы рассматриваем область около небесного экватора в декартовой системе, полагая $\cos\delta_0 = 1$. Вычисляя эти величины и умножая их на (–40000 лет), мы определяем координаты звезд в заданную эпоху, но в современной координатной сетке, не учитывая прецессию. Важно, что собственные движения даны в угловых секундах в год, а прямые восхождения – в часовых единицах, необходим пересчет величин. Результаты наносим на график.

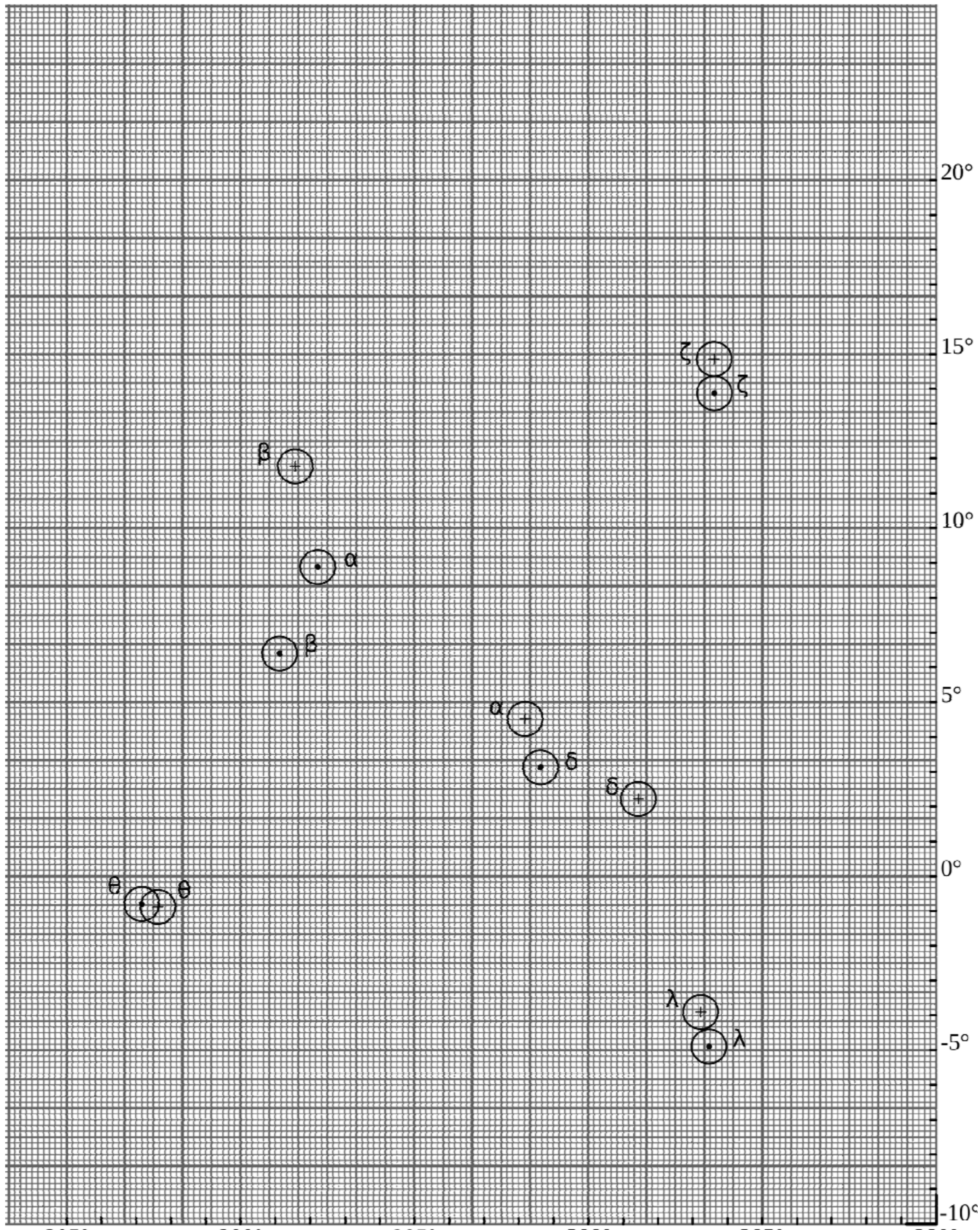
Для вычисления углового расстояния между звездами α и β Орла с заданной в условии точностью построения на графике недостаточно. Вычислим их координаты на исторический момент времени:

Параметр	α Орла	β Орла
α	19ч 50.8м	19ч 55.3м
δ	+08°52′	+06°24′
μ_α, 10^{-3}″/год	532	39
μ_δ, 10^{-3}″/год	391	–483
α_H (40000 лет назад)	19ч 27.2м	19ч 53.6м
δ_H (40000 лет назад)	+04°31′	+11°46′

40000 тысяч лет назад угловое расстояние между звездами было равно

$$l = \sqrt{[(19\text{ч}27.2\text{м} - 19\text{ч}53.6\text{м})\cdot 15^\circ/\text{ч}]^2 + (4^\circ 31' - 11^\circ 46')^2} = 9.8^\circ.$$

Здесь мы вновь опустили фактор ($\cos\delta_0$) при вычислении компоненты расстояния по прямому восхождению. Тот же ответ с точностью до 0.1° мы можем получить при более точных вычислениях с учетом фактора ($1/\cos\delta_0$) в формуле для α и фактора ($\cos\delta_0$) в формуле для l или с использованием формул сферической тригонометрии.



Система оценивания. Задача состоит из двух подзадач: построение графика (6 баллов) и проведение вычислений (4 балла). Каждая подзадача оценивается независимо: снижение оценки за недостатки выполнения каждой подзадачи не должны влиять на оценку за другую подзадачу. Итоговая оценка за задачу является суммой оценок за подзадачи, максимальная оценка за задание 6 составляет ***10 баллов***.

Положение звезд на графике должно совпадать с точностью до 3 мм. Правильное положение каждой звезды оценивается в 0.5 балла. Дробная суммарная оценка округляется в пользу участника олимпиады. Таким образом, за правильное текущее положение звезд выставляется 3 балла и за положение в прошлом – еще 3 балла.

Если перепутаны обозначения звезд (кружки и крестики), или все звезды обозначались одним и тем же образом, оценка за построение графика снижается на 2 балла. Если не обозначены оси или никак не размечены шкалы на них, оценка за построение графика снижается на 2 балла. Если ось прямых восхождений или склонений направлена в противоположную сторону, оценка за построение снижается на 2 балла. Если в итоге получается отрицательная оценка, за этап выставляется 0 баллов. Если график выполнен не в нужном масштабе или вообще не на миллиметровке, построение не оценивается.

На втором этапе решения вычисление координат звезд в прошлом по правильным формулам оценивается в 1 балл. За правильную формулу для вычисления расстояния между звездами выставляется 1 балл. Участники могут использовать приближенные формулы для окрестностей экватора, приведенные выше. Можно производить вычисления более точно, например, с учетом фактора ($\cos\delta_0$). При этом он попадает в знаменатель при расчете смещения звезды по прямому восхождению, но затем – в числитель при расчете углового расстояния, данные факторы практически компенсируют друг друга. Возможно использование формул сферической тригонометрии, хотя для данной задачи они не являются необходимыми. Вычисление расстояния между звездами α и β в прошлом оценивается в 2 балла, если ответ составляет от 9.7° до 9.9°. Если ответ не попадает в этот интервал, но остается в пределах от 9.3° до 10.3°, оценка снижается на 1 балл.

Если координаты звезд α и β численно не определяются, а ответ получен измерениями на графике (даже при его случайной точности), то за весь этап решения выставляется 1 балл из 4.

<u>10 класс</u>

1. Условие. Далекое светило с координатами (α=0, δ=0) находится на высоте 0 над горизонтом в 0ч0м по Всемирному времени 1 января. Определите координаты всех пунктов на Земле, где такое может быть. Рефракцией и уравнением времени пренебречь. *(О.С. Угольников)*

1. Решение. Указанная точка неба – ни что иное, как точка весеннего равноденствия. Так как она располагается на небесном экваторе, то всюду на Земле, кроме полюсов, она восходит за 6 часов по звездному времени до своей верхней кульминации и заходит через 6 звездных часов после нее (по условию задачи, мы пренебрегаем рефракцией). То есть, условие задачи выполняется при звездном времени S, равном 6ч и 18ч.

1 января наступает через 10 (±1) суток после зимнего солнцестояния. Если в зимнее солнцестояние звездное время в полночь S_0 составляет 6 часов, то каждую следующую солнечную полночь оно увеличивается примерно на 4 минуты (солнечные сутки на 4 минуты длиннее звездных) и в Новый год оно равно 6ч40м. В пункте с географической долготой λ солнечное время равно UT+λ, а звездное время равно

$$S = S_0 + \mathrm{UT} + \lambda.$$

Отсюда мы можем определить долготу точек, на которых звездное время равно заданному значению S:

$$\lambda = S - S_0 - \mathrm{UT}.$$

Время S равно 6 или 18 часов, а всемирное время UT равно нулю. Получается, что условие задачи выполняется на меридианах с долготой –40м (10° з.д.) и 11ч20м (170° в.д.). Разумеется, оно выполняется и на полюсах Земли, где точка весеннего равноденствия всегда находится на горизонте. Решение задачи – большой круг на Земле, включающий в себя полюса и два указанных меридиана.

1. Система оценивания. Решение задания разбивается на этапы, которые могут выполняться в произвольном порядке:

Этап 1 – определение звездного времени в солнечную полночь (полдень, другой фиксированный момент солнечных суток) 1 января. Этап оценивается в 3 балла. Для его выполнения нужно знать промежуток времени между зимним солнцестоянием и 1 января, который может изменяться в большую или меньшую сторону примерно на сутки, поэтому и само время может отличаться от приведенного выше, допускаются отклонения до 4 минут, что дает отличие ответа в 1°. При отклонении до 8 минут (2°) этап оценивается в 2 балла, до 16 минут (4°) – в 1 балл, при еще большем отклонении этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере.

Этап 2 – определение звездного времени, при котором выполняется условие задачи. Этап оценивается в 2 балла, по 1 баллу за каждое верное значение.

Этап 3 – определение долгот меридианов, на которых выполняется условие задачи. Этап оценивается в 3 балла. Если в качестве решения указан только один меридиан – этап оценивается в 1 балл при условии правильной долготы меридиана. Если множество ответов вообще не является большим кругом или полукругом, включающим меридианы – этап не засчитывается. Долготы меридианов могут отличаться от указанных выше на 1-2°, но должны быть строго противоположными друг другу. Отдельное указание полюсов Земли как точек, где условие задачи также выполняется, не является обязательным. Если же полюса фигурируют как единственное решение задачи, общая оценка не превышает 2 баллов.

Необходимо отметить, что вместо долгот двух искомых меридианов участник олимпиады может определять их диапазон, определяемый вариациями моментов зимнего солнцестояния и звездного времени в новогоднюю полночь. Диапазон долгот составляет примерно ±1°, что расширяет область решения до двух полос, сужающихся к полюсам. Такой вывод при условии правильности центральных долгот и ширины также засчитывается как верное решение этапа.

Второй и третий этапы решения могут быть заменены вычислением координаты точки на Земле, где описанная в условии точка весеннего равноденствия находится в зените (0° ш., 100° з.д., 3 балла) и дальнейшем определении мест, где она видна на горизонте, как удаленных на 90° от этой точки (2 балла).

2. Условие. Синодический период астероида, движущегося по круговой орбите в плоскости эклиптики, равен тропическому году (365.2422 сут). Чему равен радиус его орбиты? *(Е.Н. Фадеев)*

2. Решение. Тропический год – это промежуток времени, за который Солнце, двигаясь по эклиптике, возвращается в исходную точку, за которую обычно принимается точка весеннего равноденствия. Но сама точка равноденствия смещается по эклиптике навстречу Солнцу на 50.3″ (годовая прецессия на эклиптике). Поэтому тропический год короче периода обращения Земли вокруг Солнца.

Солнце проходит 359.9860° (полный круг за вычетом годовой прецессии) за S=365.2422 сут. Значит, полный оборот вокруг Солнца Земля совершает за период

$$T = \frac{360}{359.9860} \cdot 365.2422 \text{ сут } = 365.2564 \text{ сут } = 1.0000389 \text{ лет}.$$

Заметим, что синодический период астероида меньше звездного года. Для внешнего астероида такое возможно только в том случае, если он обращается вокруг Солнца в сторону, противоположную направлению орбитального вращения Земли. Воспользовавшись уравнением синодического движения, можно найти период астероида. В случае астероида на внешней орбите получаем

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{S} - \frac{1}{T}; \quad T_1 = \frac{T \cdot S}{T - S} \approx 25770 \text{ лет}.$$

Период обращения астероида оказывается равным периоду прецессии земной оси. Этот же результат можно получить, рассчитав отношение (360°/α), где α – годовая величина прецессии.

Возможен и другой случай, если астероид внутренний с периодом обращения T_2. Тогда

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T}; \quad T_2 = \frac{T \cdot S}{T + S} \approx 0.5 \text{ года}.$$

Радиус орбиты в астрономических единицах для обоих случаев можно получить из простой формулировки III закона Кеплера:

$$R_{1,2} = T_{1,2}^{2/3}.$$

Радиусы орбит равны 872 а.е. и 0.63 а.е. соответственно.

2. Система оценивания.

Этап 1 – определение периода обращения внешнего астероида – 4 балла. Этот этап можно выполнять в общем виде, как описано выше, а можно использовать знания величин звездного года и периода прецессии. В частности, можно сразу указать, что искомый период есть период прецессии. Требуемая точность – 500 лет.

Этап 2 – определение периода обращения внутреннего астероида – 2 балла. Участники могут сразу указать, что он равен 0.5 года, могут искать более точное значение (0.50001 года), что эквивалентно в плане оценивания.

Этап 3 – определение радиусов обеих орбит по III закону Кеплера. Оценивается в 2 балла (по 1 баллу за каждое значение). Требуемая точность – 30 а.е. и 0.01 а.е. соответственно.

3. Условие. Метеорный рой движется на расстоянии 1 а.е. от Солнца по параболической орбите в точности навстречу Земле. В некоторой точке Земли радиант потока располагается в зените. Определите видимые угловые скорости метеоров (в градусах в секунду) у горизонта и на высоте 45° над ним, считая их высоту равной 100 км. Атмосферную рефракцию не учитывать. *(О.С. Угольников)*

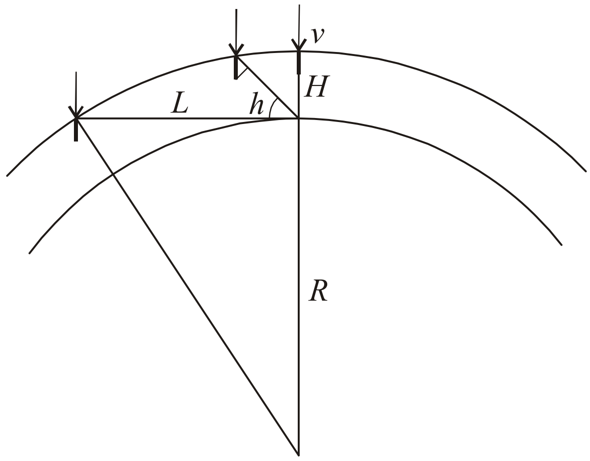
3. Решение. Земля движется по орбите вокруг Солнца с круговой скоростью

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{a}} \approx 30 \text{ км/с.}$$

Здесь M – масса Солнца, a – радиус орбиты Земли. Метеоры движутся навстречу Земле, перпендикулярно направлению на Солнце. Их гелиоцентрическая скорость метеоров на параболической орбите равна

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{a}} \approx 42 \text{ км/с.}$$

Таким образом, геоцентрическая скорость метеоров v составляет $v_1+v_2=72$ км/с. В описанном в условии пункте Земли радиант потока находится в зените, то есть метеоры летят параллельно линии, идущей из этого пункта в центр Земли. Они ускоряются притяжением Земли, но весьма незначительно, так как вторая космическая скорость для Земли (11 км/с) существенно меньше. Скорости складываются аналогично теореме Пифагора, и результирующий эффект составит менее 1 км/с.



Если метеор наблюдается на достаточно большой высоте h над горизонтом, то его угловую скорость можно найти, пренебрегая кривизной Земли. Тангенциальная скорость метеора равна $v\cos h$, а расстояние до него – $H/\sin h$, где H есть высота метеора. Видимая угловая скорость метеора будет равна

$$\omega = \frac{v \sin h \cos h}{H} = \frac{v \sin 2h}{2H}.$$

Если высота h равна 45°, то угловая скорость метеора есть $v/2H$, что равно 0.36 рад/с или 21°/с. Можно обратить внимание, что это максимальная угловая скорость метеоров при радианте, расположенном в зените. Для малых высот метеоров над горизонтом подобная простая модель неприменима. Если метеор виден у самого горизонта, то его скорость перпендикулярна лучу зрения и тангенциальная скорость равна v. Расстояние до метеора равно

$$L = \sqrt{(R+H)^2 - R^2} \approx \sqrt{2RH} = 1130 \text{ км.}$$

Угловая скорость метеора на горизонте составит

$$\omega_{\text{Н}} = \frac{v}{\sqrt{2RH}} = 0.064 \text{ рад/с} = 3.7\,°/\text{с}.$$

Система оценивания. Выше приведено наиболее простое и при этом достаточное по точности решение задания. Участники могут выполнять решение более сложным образом, что не влияет на оценку, если усложнение не приводит к появлению ошибок.

1 этап решения – определение геоцентрической скорости метеоров – 2 балла. Оценивается только в случае правильного значения – 72 км/с с точностью до 1 км/с (при учете притяжения Земли скорость составит 73 км/с, что также считается верным значением). Участник может не записывать численное значение скорости, продолжая решение в общем виде, тогда оценка определяется правильностью формул для вычисления скорости. Если участник получает неверное значение или путает геоцентрическую скорость с гелиоцентрической (42 км/с), то данные 2 балла не выставляются, но последующие этапы оцениваются в полной мере. В последнем случае в качестве ответов должны быть получены значения угловых скоростей 12°/с и 2.1°/с.

Участники олимпиады могут пытаться учитывать вклад осевого вращения Земли. Оно имеет скорость не более 0.46 км/с и в указанной точке будет перпендикулярно геоцентрической скорости метеоров. Тем самым, оно никак не скажется на видимой скорости метеоров, в чем можно убедиться из теоремы Пифагора. Правильный учет осевого вращения Земли или вывод о его несущественности не изменяет оценку за этап, при существенном изменении скорости за счет этого эффекта оценка снижается в соответствии с критериями, описанными выше. То же можно сказать о приращении скорости метеоров за счет притяжения Земли.

2 этап решения – 3 балла – определение угловой скорости метеора на высоте 45° над горизонтом. Ее можно вычислять с учетом сферичности Земли, что практически не повлияет на ответ (разница порядка 0.1°/с). Требуемая точность – 1°/с, при ошибке до 3°/с оценка снижается на 1 балл, при больших ошибках этап не засчитывается (ошибки на предыдущем этапе здесь не учитываются). Если ответ записывается в других единицах (например, в радианах в секунду) - оценка уменьшается на 1 балл, так как требуемые единицы указаны в условии.

3 этап решения – 3 балла – определение угловой скорости метеора на горизонте. Расстояние до метеора L может определяться как приближенно, так и точно, что не влияет на ответ в пределах требуемой точности – 0.5°/с. При ошибке до 1°/с оценка снижается на 1 балл, при больших ошибках этап не засчитывается. Если ответ записывается в других единицах (например, в радианах в секунду) – оценка уменьшается на 1 балл, аналогично второму этапу.

4. Условие. Переменная звезда пульсирует так, что температура поверхности меняется обратно пропорционально радиусу звезды. Во сколько раз должен уменьшиться объем звезды, чтобы она стала ярче на 1^m? *(О.С. Угольников)*

4. Решение. Пусть в какой-то момент времени звезда имела радиус R и температуру T. Затем ее радиус стал меньше в K раз (R/K), а температура в соответствии с условием задачи возросла в K раз и стала равной KT. Тогда светимость звезды, пропорциональная R^2 и T^4, изменится:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{(R/K)^2 (KT)^4}{R^2 T^4} = K^2.$$

Чтобы блеск звезды стал ярче на 1^m, она должна стать ярче в $10^{0.4}$=2.512 раз. То есть, ее радиус должен уменьшиться в $10^{0.2}$ раза, а объем – в $10^{0.6}$ = 4 раза.

4. Система оценивания.

1 этап – 5 баллов. Указание правильного характера зависимости светимости звезды от ее радиуса (или сразу объема) и температуры. Этап засчитывается полностью только при правильном характере зависимости (двух верных показателях степени), при ошибке в одном из показателей за этап выставляется 2 балла. Ошибочное выполнение этапа не сказывается на оценках за следующие этапы.

2 этап – 3 балла. Вычисление изменения объема. Участники могут делать это напрямую, а могут сначала определить изменение радиуса (2 балла), а затем перейти к объему (1 балл). Если участник определяет только изменение радиуса, забывая об изменении объема, последний 1 балл не выставляется. Ответы «уменьшение в 4 раза» или «изменение в 0.25 раз» считаются в равной степени верными.

5. Условие. Небольшое рассеянное скопление состоит из 40 одинаковых звезд и имеет общий блеск 8^m. Какой должен быть диаметр объектива телескопа, чтобы в него можно было увидеть отдельные звезды скопления?

5. Решение и система оценивания. См. задачу 5 для 9 класса.

6. Условие. Даны координаты и собственные движения звезд из созвездия Орел на текущий момент. Задано полное собственное движение и позиционный угол его направления, отсчитываемый от направления на Северный полюс мира против часовой стрелки. Нарисуйте на графике положение этих звезд в настоящий момент и 40000 лет назад, как могли бы их видеть последние неандертальцы. Найдите угловое расстояние между звездами α и β Орла 40000 лет назад с точностью 0.1°. Изменение системы координат, связанное с прецессией оси вращения Земли, не рассматривайте.

Требования к графику: Построение проводятся на выданной вам миллиметровой бумаге. Масштаб по обеим осям составляет 10 угловых минут на миллиметр (малое деление на миллиметровой бумаге). Текущее положение звезд обозначайте кружком (•) и подпишите соответствующей греческой буквой справа, прошлое – крестиком (+) и соответствующей буквой слева. Направление вверх на графике должно совпадать с современным направлением на Северный полюс мира.

Звезда	Прямое восхождение, α	Склонение, δ	Собственное движение, μ, 10^{-3}″/год	Позиционный угол, γ, °
α	19ч 50.8м	+08°52′	660	53.7
β	19ч 55.3м	+06°24′	485	175.4
δ	19ч 25.5м	+03°07′	268	72.1
ζ	19ч 05.4м	+13°52′	88	183.0
θ	20ч 11.3м	–00°49′	40	81.4
λ	19ч 06.2м	–04°53′	91	191.9

Решение и система оценивания. См. задачу 6 для 9 класса.

11 класс

1. Условие. Далекое светило с координатами (α=0, δ=0) находится на высоте 0 над горизонтом в 0ч0м по Всемирному времени 1 января. Определите координаты всех пунктов на Земле, где такое может быть. Рефракцией и уравнением времени пренебречь.

1. Решение и система оценивания. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Условие. Синодический период астероида, движущегося по круговой орбите в плоскости эклиптики, равен тропическому году (365.2422 сут). Чему равен радиус его орбиты?

2. Решение и система оценивания. См. задачу 2 для 10 класса.

3. Условие. Метеорный рой движется на расстоянии 1 а.е. от Солнца по параболической орбите в точности навстречу Земле. В некоторой точке Земли радиант потока располагается в зените. Определите видимые угловые скорости метеоров (в градусах в секунду) у горизонта и на высоте 45° над ним, считая их высоту равной 100 км. Атмосферную рефракцию не учитывать.

3. Решение и система оценивания. См. задачу 3 для 10 класса.

4. Условие. По заданию руководства астроном готовил таблицу параметров трех звезд – Солнца, некоторой звезды главной последовательности (№1) и звезды-сверхгиганта (№2). В часть клеток таблицы он забыл внести необходимые значения. Определите недостающие параметры и заполните таблицу, перенеся ее на бланк решений. Использованные формулы и расчеты приведите в решении. *(А.М. Татарников)*

Характеристика	Солнце	Звезда №1 (главная последовательность)	Звезда №2 (сверхгигант)
Масса (в массах Солнца)	1.00		12
Радиус (в радиусах Солнца)	1.00	3.0	
Светимость (в светимостях Солнца)			100 000
Средняя плотность (в кг/м^3)	1410		
Температура поверхности (в К)	5800	10000	3500
Абсолютная визуальная звездная величина	+4.8		

4. Решение. В таблице приведены все требуемые величины (выделены жирным шрифтом):

Характеристика	Солнце	Звезда №1 (главная последовательность)	Звезда №2 (сверхгигант)
Масса (в массах Солнца)	1.00	**3.2** (±0.3)	12
Радиус (в радиусах Солнца)	1.00	3.0	**870** (±20)
Светимость (в светимостях Солнца)	**1.00** (ровно)	**80** (±3)	100 000
Средняя плотность (в кг/м^3)	1410	**170** (±20)	$\mathbf{2.6\cdot10^{-5}}$ ($\pm0.2\cdot10^{-5}$)
Температура поверхности (в К)	5800	10000	3500
Абсолютная визуальная звездная величина	+4.8	**0.0** (±0.1)	**–7.7** (±0.1)

1) Можно без вычислений заполнить ячейку со светимостью Солнца – она равна 1.00 (в солнечных единицах).

Для звезды №1 (главная последовательность):
2) Для определения светимости звезды L используем формулу для светимости $L = 4\pi\sigma R^2 T^4$, где R и T – радиус и температура звезды. Можно выразить радиус и температуру в солнечных единицах и получим светимость в 80 светимостей Солнца.
3) Зная светимость в солнечных единицах, по формуле Погсона находим болометрическую абсолютную звёздную величину: $m = 4.8 - 2.5 \lg L = 0$.
4) Т.к. звезда №1 принадлежит главной последовательности, то для неё выполняется условие $L{\sim}M^N$, где M – масса звезды, а N – показатель степени, который для масс в 1-20 масс Солнца варьирует в пределах от 3.5 до 4. В зависимости от принимаемого значения масса получается равной от 3 до 3.5 масс Солнца.
5) Зная массу и радиус звезды легко посчитать её среднюю плотность. Сначала вычислим эту величину в солнечных единицах, а затем и в абсолютных. Для массы в 3.2 массы Солнца плотность равна 170 кг/м^3.

Для звезды №2 (сверхгигант):
6) Из температуры и светимости в солнечных единицах получаем, что радиус звезды равен $(L/T^4)^{1/2}$ = 870 радиусов Солнца.
7) Плотность звезды можно получить из ее массы и радиуса: $2.6\cdot10^{-5}$ кг/м^3.
8) Светимость в 100 000 светимостей Солнца означает, что эта звезда на 12.5^m ярче, чем Солнце, и ее абсолютная звездная величина составляет -7.7^m.

4. Система оценивания. Каждый верный ответ в рамках оговоренной в таблице точности оценивается в 1 балл. Однако, в случае, если ответы образуют логическую цепочку (например, оценка массы звезды, из которой далее вычисляется плотность) и первый из ответов неточный – он не засчитывается, но последующие ответы корректируются и засчитываются, если при этих вычислениях участник не делает новой ошибки. Погрешности величин в таблице приведены для работы жюри, участник их указывать не обязан.

5. Условие. Плотная галактика имеет светимость ровно в 10^{10} раз больше, чем Солнце. При каком красном смещении z она могла бы наблюдаться визуально в телескоп с диаметром объектива 30 см? Считать размеры галактики малыми, но при этом взаимным экранированием звезд и межзвездным поглощением, а также пекулярной (не связанной с хаббловским расширением) скоростью галактики пренебречь. *(О.С. Угольников)*

5. Решение. Галактика излучает в 10^{10} раз или на 25 звездных величин сильнее Солнца. Ее абсолютная звездная величина M составляет -20.2^m. Определим предельную звездную величину для телескопа с диаметром объектива D=30 см, считая объект на небе точечным:

$$m = 6 + 5 \lg (D/d) = 14.5.$$

Здесь d – диаметр зрачка глаза, который мы приняли равной 6 мм. Теперь мы можем определить расстояние в парсеках, с которого галактика будет иметь такую звездную величину:

$$\lg r = 1 + (m - M)/5; \quad r = 87 \text{ Мпк}.$$

Скорость удаления такой галактики составит $H\cdot r$, где H – постоянная Хаббла. Максимальное красное смещение галактики будет равно $z = H\cdot r/c = 0.020$.

5. Система оценивания.

1 этап – определение абсолютной звездной величины галактики – 2 балла, требуемая точность – 0.1^m. При неверном определении этап не засчитывается, но при ошибках менее 5^m последующие этапы оцениваются в полной мере. Использование в качестве абсолютной звездной величины Солнца болометрической величины ($+4.7^m$) не является ошибкой, меняет выводы последующих этапов существенно меньше допустимых погрешностей и не может быть основанием для снижения оценок.

2 этап – определение предельной звездной величины телескопа – 3 балла. В качестве величины диаметра зрачка глаза могут быть взяты значения от 5 до 8 мм, что меняет предельную звездную величину от 13.9^m до 14.9^m, а красное смещение в ответе – от 0.015 до 0.024. Ошибка от 0.7^m до 1^m уменьшает оценку на 1 балл, ошибка до 2^m – на 2 балла, без влияния на другие этапы.

3 этап – определение максимального красного смещения – 3 балла. Допустимы отклонения в значении постоянной Хаббла на ±5 км/с·Мпк, что может внести отклонение в величину z порядка 0.001-0.002.

Участники олимпиады могут выполнять задание иными способами, например – найдя предельную звездную величину для телескопа (2 этап, 3 балла), далее найти видимую звездную величину Солнца при таких условиях наблюдения (эквивалентно 1 этапу, 2 балла) и дальше определить расстояние до него и красное смещение (3 балла).

6. Условие. Даны координаты и собственные движения звезд из созвездия Орел на текущий момент. Задано полное собственное движение и позиционный угол его направления, отсчитываемый от направления на Северный полюс мира против часовой стрелки. Нарисуйте на графике положение этих звезд в настоящий момент и 40000 лет назад, как могли бы их видеть последние неандертальцы. Найдите угловое расстояние между звездами α и β Орла 40000 лет назад с точностью 0.1°. Изменение системы координат, связанное с прецессией оси вращения Земли, не рассматривайте.

Требования к графику: Построение проводятся на выданной вам миллиметровой бумаге. Масштаб по обеим осям составляет 10 угловых минут на миллиметр (малое деление на миллиметровой бумаге). Текущее положение звезд обозначайте кружком (•) и подпишите соответствующей греческой буквой справа, прошлое – крестиком (+) и соответствующей буквой слева. Направление вверх на графике должно совпадать с современным направлением на Северный полюс мира.

Звезда	Прямое восхождение, α	Склонение, δ	Собственное движение, μ, $10^{-3}{}''$/год	Позиционный угол, γ, °
α	19ч 50.8м	+08°52′	660	53.7
β	19ч 55.3м	+06°24′	485	175.4
δ	19ч 25.5м	+03°07′	268	72.1
ζ	19ч 05.4м	+13°52′	88	183.0
θ	20ч 11.3м	–00°49′	40	81.4
λ	19ч 06.2м	–04°53′	91	191.9

6. Решение и система оценивания. См. задачу 6 для 9 класса.