Материалы для проведения регионального этапа

XLVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2021–2022 учебный год

Первый день

4–5 февраля 2022 г.

Москва, 2022

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, А. С. Кузнецов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **4 февраля 2022 г.** (I тур) и **5 февраля 2022 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2021–2022 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

11.1. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75? (*П. Кожевников*)

Ответ. Может.

Решение. Пример: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20$. В этом наборе три числа $(5, 10, 20)$ делятся на 5, четыре числа $(4, 8, 12, 20)$ делятся на 4, а общая сумма равна 71.

Замечание. Можно доказать (но, конечно, в задаче этого не требуется), что на самом деле в любом примере, удовлетворяющем условию задачи, должны обязательно присутствовать числа $1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12$ и 20, а вместо числа 6 можно взять 7 или 9.

Комментарий. Для получения полного балла (7 баллов за задачу) достаточно наличие верного примера без указания, какие числа делятся на 4 и 5, явный подсчёт суммы тоже не требуется. Любой неработающий пример оценивается в 0 баллов.

11.2. Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b+c) = P(a),\ P(c+a) = P(b),\ P(a+b) = P(c).$$

(*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть d — абсцисса вершины параболы $y = P(x)$, так что прямая $x = d$ — ось симметрии параболы. Тогда для любых чисел t и s с суммой $2d$ (т.е. таких, что точки t и s симметричны относительно d) выполнено $P(t) = P(s)$. Таким образом, любая тройка попарно различных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 2d$, будет удовлетворять условию задачи. Можно взять, скажем, $a = \frac{2d}{3} - 1$, $b = \frac{2d}{3}$, $c = \frac{2d}{3} + 1$.

Комментарий. За использование (очевидного) факта, что существует тройка (или пара) попарно различных чисел с заданной суммой, баллы не снижаются.

Сформулировано условие, эквивалентное равенству $P(s) = P(t)$, т.е. показано, что $P(s) = P(t)$ означает $t = s$ или $t + s = 2d$ (иначе говоря, точки t и s симметричны относительно оси параболы) — 3 балла.

11.3. В треугольной пирамиде $ABCD$ на её гранях BCD и ACD нашлись соответственно точки A' и B' такие, что $\angle AB'C = \angle AB'D = \angle BA'C = \angle BA'D = 120°$. Известно, что прямые AA' и BB' пересекаются. Докажите, что точки A' и B' равноудалены от прямой CD. (*А. Заславский*)

Решение. Из условия задачи следует, что точки A, A', B, B' лежат в одной плоскости, поэтому прямые BA' и AB' пересекают ребро CD в одной точке X. Из условия следует, что эти прямые являются биссектрисами углов $CA'D$, $CB'D$ соответственно. Отсюда, по свойству биссектрисы, $CA' : A'D = CX : XD = CB' : B'D$, а поскольку $\angle CA'D = \angle CB'D = 120°$, треугольники $CA'D$ и $CB'D$ подобны. Поскольку CD — общая сторона этих треугольников, эти треугольники равны. В этих равных треугольниках равны соответствующие высоты из вершин A' и B'. Это и требовалось доказать.

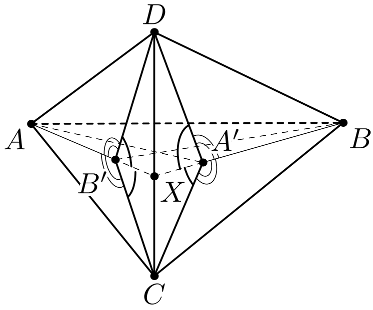

Рис. 4

Комментарий. Указано только, что прямые BA' и AB' пересекают ребро CD в одной точке — 1 балл.

Указано, что прямые BA' и AB' пересекают ребро CD в одной точке; и кроме того, доказано соотношение $CA' : A'D = CB' : B'D$ или подобие $CA'D \sim CB'D$ — 4 балла.

11.4. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что при любом выборе 101 человека из этой компании количество пар дружащих людей среди них нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании. (*Е. Бакаев, И. Богданов*)

Ответ. 102.

Решение. Во всех решениях ниже мы рассматриваем граф дружб, в котором вершины — это люди в компании, а два человека соединены ребром, если они дружат.

Рассмотрим 102 вершины, и построим на них следующий граф. Одну вершину x соединим с тремя другими v_1, v_2, v_3. Остальные 98 вершин разобьём на пары и соединим вершины в каждой паре. Получился граф с $98/2+3 = 52$ рёбрами. При удалении любой вершины удаляется нечётное число рёбер, то есть остаётся также нечётное число. Поэтому компания, описанная в условии, может состоять из 102 человек.

Осталось показать, что не существует такой компании из 103 человек (тогда и компании из более чем 103 человек тоже быть не может). Ниже мы приводим несколько различных способов сделать это; в каждом способе мы предполагаем, от противного, что такая компания нашлась.

Первое решение. Существует всего $n = C_{103}^2 = 51\cdot103$ способа выбросить две вершины из 103, оставив 101. Пронумеруем эти способы числами от 1 до n. Пусть a_i — количество рёбер на оставшихся 101 вершинах в i-м способе; по предположению, все числа a_i нечётны, а значит, нечётна и их сумма S (поскольку число n нечётно).

С другой стороны, рассмотрим любое ребро uv. Это ребро учтено в числе a_i ровно тогда, когда вершины u и v не выброшены в i-м способе, то есть когда выброшена какая-то пара из оставшихся 101 вершин. Это происходит в $k = C_{101}^2 = 50 \cdot 101$ способах. Итак, каждое ребро учтено в S чётное количество k раз, поэтому S должно быть чётным. Противоречие.

Второе решение. Назовём вершину *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной* иначе. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть общее количество рёбер в графе нечётно. Тогда, выкидывая любую пару вершин, мы должны выкинуть из графа чётное число рёбер (чтобы осталось нечётное число). С другой стороны, если мы выкидываем вершины со степенями d_1 и d_2, то число выкинутых рёбер равно d_1+d_2, если эти вершины не соединены ребром, и $d_1 + d_2 - 1$, если соединены. Отсюда следует, что вершины одинаковой чётности всегда не соединены ребром, а вершины разной чётности — всегда соединены.

Значит, если в графе k чётных вершин, то общее число рёбер равно $k(103 - k)$, то есть чётно. Но мы предполагали, что это количество нечётно — противоречие.

Случай 2. Пусть общее количество рёбер в графе чётно. Аналогично получаем, что вершины одинаковой чётности всегда соединены ребром, а вершины разной чётности не соединены. Поэтому, если в графе k чётных вершин, то число *отсутствующих* рёбер равно $k(103 - k)$, то есть чётно. Поэтому общее число рёбер есть $C_{103}^2 - k(103 - k) = 103 \cdot 51 - k(103 - k)$, то есть нечётно. Но мы предполагали, что это количество чётно.

Замечание 1. Разумеется, существуют и другие примеры компании из 102 человек, удовлетворяющей условию.

Замечание 2. Существует и такая вариация второго решения.

Рассмотрим произвольные 102 вершины и индуцированный подграф на этих вершинах, пусть в нём k рёбер. Выбрасывая из них произвольную вершину (скажем, степени d), получаем 101 вершину с нечётным количеством рёбер $k - d$. Значит, степень любой вершины в нашем подграфе имеет чётность, отличную от чётности k, то есть степени всех 102 вершин имеют одну и ту же чётность.

Рассмотрим теперь весь граф на 103 вершинах. Назовём вершину *чётной*, если после её удаления остаётся граф, в котором все степени вершин чётны, и *нечётной* иначе. Тогда две вершины одной чётности соединены с одними и теми же из остальных вершин, а две вершины разной чётности — с наборами вершин, дополняющими друг друга до всего множества из 101 оставшейся вершины. Отсюда несложно выяснить, как и во втором решении, что граф — либо полный двудольный, либо объединение двух полных графов. Далее можно действовать как и в этом решении.

Комментарий. Утверждение о том, что в любом графе чётное количество вершин нечётной степени, принимается без доказательства.

Только ответ — 0 баллов.

Только приведён пример компании из 102 человека, удовлетворяющей условию — 1 балл.

Замечено только, что для завершения решения достаточно показать, что в компании не может быть *ровно* 103 человека — баллы не добавляются. Если это соображение упущено в решении — баллы не снимаются.

Доказано только, что в компании не может быть 103 человек — 6 баллов.

Ниже перечислены некоторые продвижения в доказательстве этого факта. Баллы за разные продвижения *не складываются*; к ним может добавляться 1 балл за верный пример компании из 102 человека.

Доказано только, что в любой компании из 102 человек, удовлетворяющей условию, все степени вершин имеют одинаковую чётность — 2 балла.

Доказано, что граф — либо полный двудольный, либо объединение двух полных графов (как показано во втором решении) — 4 балла.

Если один из вышеупомянутых случаев упущен (без достаточных на то оснований) — 3 балла вместо 4.

Разобран до конца лишь один из двух случаев из второго решения — 4 балла.

11.5. Пусть S — 100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел, не превосходящих 10 000. Отметим в пространстве все точки, каждая из координат которых принадлежит множеству S. К каждой из 1 000 000 отмеченных точек (x, y, z) прикрепим шарик с написанным на нём числом $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$. На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?

(*П. Козлов*)

Ответ. $3 \cdot C_{100}^2 = 14\,850$.

Решение. Назовём тройку натуральных чисел (x, y, z), элементы которой принадлежат S, *хорошей*, если

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx). \qquad (*)$$

Таким образом, нам надо найти наибольшее возможное количество хороших троек.

Выясним, когда тройка хорошая. Перепишем $(*)$ как квадратное уравнение относительно x,

$$x^2 - 2x(y+z) + (y-z)^2 = 0.$$

Решая его, получаем

$$x = (y+z) \pm 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2,$$

откуда $\sqrt{x} = \pm\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$. Иначе говоря, тройка является хорошей тогда и только тогда, когда одно из чисел $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ и $\sqrt{z}$ равно сумме двух других.

Пусть $s_1 < s_2 < \ldots < s_{100}$ — все элементы множества S. Положим $t_i = \sqrt{s_i}$. Оценим количество хороших троек (x, y, z), в которых z — наибольшее число, то есть $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Заметим, что при любых $1 \leqslant i < j \leqslant 100$ есть не более одной такой тройки, в которой $\sqrt{x} = t_i$ и $\sqrt{z} = t_j$ (по этим значениям восстанавливается $\sqrt{y} = \sqrt{z} - \sqrt{x}$). Поэтому оцениваемое количество не превосходит количества таких пар чисел (i, j), то есть C_{100}^2.

Аналогично, количества хороших троек, в которых наибольшими являются x и y, не превосходят C_{100}^2. Поэтому общее количество хороших троек не больше $3 \cdot C_{100}^2$.

Эта оценка достигается, если положить $s_i = i^2$, то есть $t_i = i$: действительно, тогда при любых $i < j$ найдётся хорошая тройка (s_i, s_{j-i}, s_j).

Замечание 1. Можно показать, что для того, чтобы оценка достигалась, необходимо выполнение равенств $t_i = it_1$ при всех i. Поскольку $1 \leqslant t_i \leqslant 100$, приведённый выше пример — единственный.

Замечание 2. Можно показать, что верен следующий **факт:** равенство $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ при натуральных x, y, z возможно лишь тогда, когда отношения x/z и y/z являются квадратами рациональных чисел, то есть когда $x = a^2t$, $y = b^2t$ и $z = c^2t$ при некоторых натуральных a, b, c и t (где $a + b = c$).

В приведённом выше решении этот факт не используется, но в работах некоторые школьники могут на него опираться.

Комментарий. Доказано, что тройка хорошая тогда и только тогда, когда одно из чисел $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ и $\sqrt{z}$ равно сумме двух других — 2 балла (эти баллы *не суммируются* с приведёнными ниже!).

Доказательство факта из замечания 2 баллов не добавляет.

Если дальнейшее верное решение использует этот факт без доказательства, снимается 1 балл.

Доказано, что хороших троек не больше, чем 14 850 — 6 баллов.

Только приведён пример, в котором ровно 14 850 хороших троек — 2 балла.