

Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

Решения задач

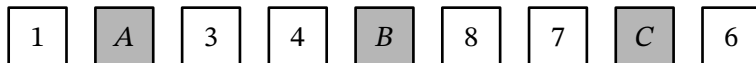
г. Москва, 2021-2022 учебный год

Содержание

4 класс	2
4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.7 4.8	
5 класс	8
5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 5.7 5.8	
6 класс	13
6.1 6.2 6.3 6.4 6.5 6.6 6.7 6.8	
7 класс	18
7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 7.6 7.7 7.8	
8 класс	23
8.1 8.2 8.3 8.4 8.5 8.6 8.7 8.8	
9 класс	29
9.1 9.2 9.3 9.4 9.5 9.6 9.7 9.8	
10 класс	34
10.1 10.2 10.3 10.4 10.5 10.6 10.7 10.8	
11 класс	40
11.1 11.2 11.3 11.4 11.5 11.6 11.7 11.8	

4 класс

Задача 4.1. На девяти карточках написаны числа от 1 до 9 (каждое — по одному разу). Эти карточки выложили в ряд так, что нет трёх подряд лежащих карточек, на которых числа идут по возрастанию, а также нет трёх подряд лежащих карточек, на которых числа идут по убыванию. Затем три карточки перевернули числом вниз, как показано на рисунке. Какие числа на них написаны?



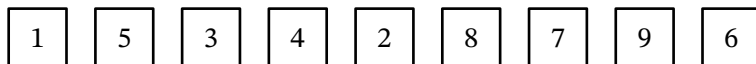
- Число на карточке *A* равно ...
- Число на карточке *B* равно ...
- Число на карточке *C* равно ...

Ответ: на карточке *A* написано число 5, на карточке *B* — 2, на карточке *C* — 9.

Решение. Недостающие числа — 2, 5 и 9.

Если число 5 будет на карточке *B*, то получатся подряд числа 3, 4, 5. Если число 5 будет на карточке *C*, то получатся подряд числа 8, 7, 5. Значит, число 5 может быть только на карточке *A*.

Если число 2 будет на карточке *C*, то получатся подряд числа 8, 7, 2. Значит, число 2 написано на карточке *B*, а 9 — на карточке *C*.



Получившийся вариант подходит. □

Задача 4.2. Найдите наименьшее число, у которого все цифры различны, а сумма всех цифр равна 32.

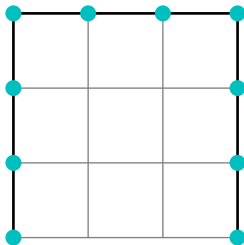
Ответ: 26789.

Решение. У четырёхзначного числа из различных цифр наибольшая возможная сумма цифр равна $9 + 8 + 7 + 6 = 30 < 32$, поэтому нужное нам число минимум пятизначное.

Постараемся сделать первую цифру как можно меньше. Ясно, что она не меньше 2. Поставим на первое место 2. Сумма оставшихся четырёх цифр 30, её можно получить только как $9 + 8 + 7 + 6$. Самую маленькую из этих цифр 6 ставим на второе место, следующую по величине цифру 7 — на третье место, 8 — на четвёртое, 9 — на пятое. □

Задача 4.3. Женя нарисовал квадрат со стороной 3 см, а затем одну из этих сторон стёр. Получилась фигура в виде буквы «П». Учительница попросила Женю расставить точки вдоль этой буквы «П», начиная с края, так, чтобы следующая точка была на расстоянии

1 см от предыдущей, как показано на рисунке, а затем посчитать, сколько получилось точек. Точек у него получилось 10.



Затем учительница решила усложнить задание и попросила посчитать число точек, но для буквы «П», полученной таким же образом из квадрата со стороной 10 см. Сколько точек будет у Жени в этот раз?

Ответ: 31.

Решение. Вдоль каждой из трёх сторон буквы «П» будет 11 точек. При этом «угловые» точки расположены сразу на двух сторонах, поэтому если 11 умножить на 3, то «угловые» точки будут учтены 2 раза. Значит, общее количество точек равно $11 \cdot 3 - 2 = 31$. □

Задача 4.4. Лев Алекс решил посчитать полоски на зебре Марти (чёрные и белые полоски чередуются). Оказалось, что чёрных полосок на одну больше, чем белых. Также Алекс заметил, что все белые полоски одинаковой ширины, а чёрные бывают широкие и узкие, причём всего белых полосок на 7 больше, чем широких чёрных. Сколько всего у Марти узких чёрных полосок?

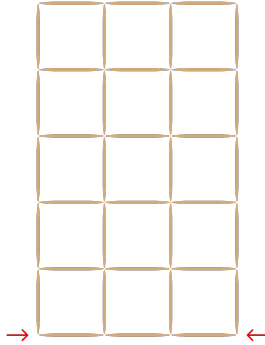
Ответ: 8.

Решение. Сначала посмотрим только на широкие чёрные полоски. Их на 7 меньше, чем белых. Если к широким чёрным полоскам добавить узкие чёрные, то это будут уже все чёрные полоски, которых на 1 больше, чем белых. Значит, для нахождения количества узких чёрных полосок нужно сначала «скомпенсировать» 7 белых полосок – число, на которое белых было больше, а затем добавить ещё одну. Получается $7 + 1 = 8$. □

Задача 4.5. Хулиган Дима выложил из 38 деревянных зубочисток конструкцию в виде прямоугольника 3×5 . Затем он одновременно поджёт два соседних угла этого прямоугольника, отмеченных на рисунке.

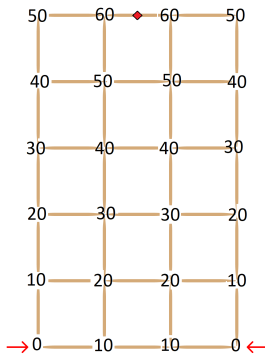
Известно, что одна зубочистка сгорает за 10 секунд. За сколько секунд сгорит вся эта конструкция?

(Огонь распространяется по зубочисткам с постоянной скоростью. Огонь продолжает распространяться с каждой сгоревшей зубочистки на все примыкающие к ней несгоревшие зубочистки.)



Ответ: 65.

Решение. На картинке ниже для каждого «узла», места соединения зубочисток, указано, за сколько секунд доберётся до него огонь. До середины средней зубочистки в верхнем горизонтальном ряду (отмечено на картинке) огонь будет добираться ещё 5 секунд.



□

Задача 4.6. Разведчик хочет передать сообщение, состоящее из нескольких написанных в ряд букв А, Б и В. Для секретности каждая буква кодируется: буква А заменяется на 011, буква Б — на 01, буква В — на 10. Используя данную кодировку, разведчик получил код

011011010011.

Появилась информация, что данную кодировку расшифровали, в связи с чем разведчику придётся использовать запасную кодировку. В ней буква А заменяется на 21, буква Б — на 122, буква В — на 1. Какой код получится у данного сообщения в новой кодировке?

Ответ: 211221121.

Решение. Посмотрим на правый конец кода. Две единицы в конце могут получиться только из буквы А: 011011010011.

А

Далее смотрим на самую правую цифру из тех, про которую ещё не разгадали, из какой буквы она получилась. Цифра 0 на конце есть только у В: 011011010011.

В А

Аналогично предыдущая буква тоже В: 011011010011.

В В А

Теперь «не разгаданная» самая правая цифра — 1. Перед ней стоит 0. Такое может получиться только из буквы Б: 011011010011.

Б В В А

«Не разгаданные» цифры справа — две единицы. Такое может получиться только из А:

011011010011.

А Б В В А

Полученное сообщение АБВВА кодируем по-новому и получаем 211221121.

А Б ВВ А

□

Задача 4.7. Школьники Александр, Борис, Сергей, Дарья и Елена с понедельника по пятницу посещали занятия хора. Известно, что:

- в каждый из пяти дней ровно трое из школьников присутствовали, а ровно двое отсутствовали;
- никто из школьников не отсутствовал два дня подряд и никто не присутствовал три дня подряд;
- Елена пропустила на два дня больше, чем Борис;
- был только один день, когда Александр и Сергей одновременно были на занятии;
- в понедельник Сергей был на занятии.

Кто из школьников был на занятии в пятницу?

Ответ: Александр, Борис, Дарья.

Решение. Поскольку никто не присутствовал три дня подряд, то максимальное число дней, в которые можно быть на занятиях, — это 4. При этом 4 занятия в неделю возможны, только если пропустить среду. Поскольку нельзя пропустить два дня подряд, то минимальное число дней, в которые можно быть на занятиях, — это 2. При этом 2 занятия в неделю возможны, только если они во вторник и четверг. Елена пропустила на два дня больше, чем Борис. Значит, Елена посетила ровно два дня (эти дни обязательно вторник и четверг), а Борис посетил ровно четыре дня (эти дни обязательно понедельник, вторник, четверг и пятница). Внесём полученную информацию в таблицу, также в ней укажем, что Сергей был в понедельник.

	пн	вт	ср	чт	пт
Александр					
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+				
Дарья					
Елена	-	+	-	+	-

В среду уже есть двое отсутствующих: Борис и Елена. Значит, все остальные в среду были.

	пн	вт	ср	чт	пт
Александр			+		
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+		+		
Дарья			+		
Елена	-	+	-	+	-

Есть только один день, когда Александр и Сергей были одновременно — это среда. Поскольку Сергей был в понедельник, значит Александра в понедельник не было. Тогда он был во вторник (потому что нельзя пропускать два дня подряд) и не был в четверг (потому что никто не присутствовал три дня подряд).

	пн	вт	ср	чт	пт
Александр	-	+	+	-	
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+		+		
Дарья			+		
Елена	-	+	-	+	-

Дарья должна была прийти в понедельник, чтобы было трое присутствующих. Кроме того, во вторник уже есть трое присутствующих, поэтому Сергея и Дарьи во вторник не было.

	пн	вт	ср	чт	пт
Александр	-	+	+	-	
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+	-	+		
Дарья	+	-	+		
Елена	-	+	-	+	-

Александр точно был в пятницу (нельзя отсутствовать два дня подряд). Тогда Сергей не был в пятницу (уже есть общий день с Александром) и был в четверг (нельзя пропускать два дня подряд).

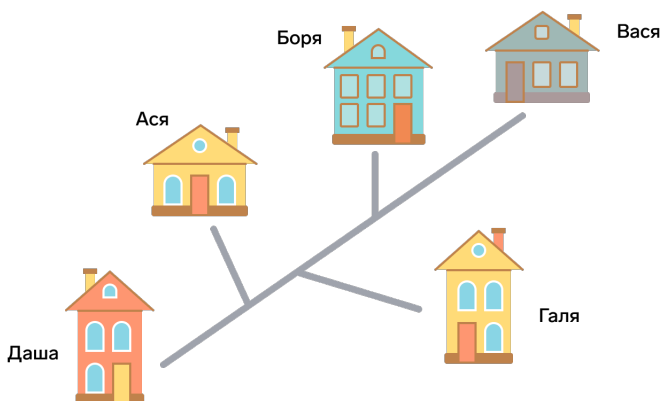
	пн	вт	ср	чт	пт
Александр	-	+	+	-	+
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+	-	+	+	-
Дарья	+	-	+		
Елена	-	+	-	+	-

В четверг есть три посещения, поэтому Дарья в четверг не была, а была в пятницу (нельзя пропускать два дня подряд).

	пн	вт	ср	чт	пт
Александр	-	+	+	-	+
Борис	+	+	-	+	+
Сергей	+	-	+	+	-
Дарья	+	-	+	-	+
Елена	-	+	-	+	-

Итак, в пятницу на занятии были только Александр, Борис и Дарья. □

Задача 4.8. На рисунке изображена схема дорог между домами пяти ребят. От Аси до Гали кратчайшее расстояние по дорогам 12 км, от Гали до Бори — 10 км, от Аси до Бори — 8 км, от Даши до Гали — 15 км, от Васи до Гали — 17 км. Сколько километров составляет кратчайшее расстояние по дорогам от Даши до Васи?



Ответ: 18.

Решение. Сложим расстояния от Даши до Гали и от Васи до Гали: $15 + 17 = 32$. Будет посчитана «основная» дорога (от Даши до Васи) и дважды «ответвление» от неё к Гале.

К полученной сумме добавим расстояние от Аси до Бори: $32 + 8 = 40$. Будут посчитаны все три ответвления (к Гале — дважды), основная дорога тоже будет посчитана, причём

участок на ней между первым и третьим ответвлением — дважды.

Вычтем из полученного значения два оставшихся расстояния: от Аси до Гали и от Гали до Бори: $40 - 12 - 10 = 18$. Теперь будет посчитана только основная дорога. \square

5 класс

Задача 5.1. В некотором месяце некоторого года ровно 5 пятниц. При этом первый и последний день этого месяца — не пятницы. Каким днём недели является 12-е число месяца?

Ответ: понедельник.

Решение. Рассмотрим все возможные варианты, каким днём недели могло быть 1-е число месяца.

Предположим, что первое число этого месяца — понедельник. Тогда пятницы — 5-е, 12-е, 19-е, 26-е числа. Их только четыре — нам не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — вторник. Тогда пятницы — 4-е, 11-е, 18-е, 25-е числа. Их только четыре — нам не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — среда. Тогда пятницы — 3-е, 10-е, 17-е, 24-е и 31-е числа. Их пять, но пятница — последний день месяца. Нам снова не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — четверг. Тогда пятницы — 2-е, 9-е, 16-е, 23-е и 30-е числа. Подходит, если в месяце 31 день. И в этом случае получается, что 12-е число — понедельник.

Первым числом пятница быть не может.

Предположим, что первое число этого месяца — суббота. Тогда пятницы — 7-е, 14-е, 21-е, 28-е числа. Их только четыре — нам не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — воскресенье. Тогда пятницы — 6-е, 13-е, 20-е, 27-е. Их только четыре — нам не подходит. \square

Задача 5.2. За круглый стол рассадили несколько человек так, что между соседними людьми расстояния одинаковые. Одному из них дали табличку с номером 1 и дальше по часовой стрелке раздали всем таблички с номерами 2, 3 и т. д.

Человек с табличкой с номером 31 заметил, что от него до человека с табличкой с номером 7 такое же расстояние, как и до человека с табличкой с номером 14. Сколько всего людей сели за стол?

Ответ: 41.

Решение. Чтобы такая ситуация была возможна, людей от 31-го до 14-го нужно считать по кругу в сторону уменьшения номеров, а от 31-го до 7-го — по кругу в сторону увеличения номеров.

Между 31-м и 14-м сидит 16 человек. Значит, между 31-м и 7-м тоже 16 человек. Среди них 6 с номерами от 1 до 6, тогда оставшиеся $16 - 6 = 10$ человек — это люди с номерами от 32-го. Самый большой номер получается 41. \square

Задача 5.3. На рисунке изображён план системы дорог некоторого города. В этом городе 8 прямых улиц, а 11 перекрёстков названы латинскими буквами A, B, C, \dots, J, K .

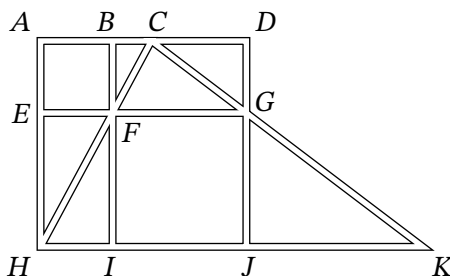
На некоторые три перекрёстка надо поставить по полицейскому так, чтобы на каждой из 8 улиц стоял хотя бы один полицейский. На какие именно три перекрёстка надо поставить полицейских? Достаточно указать хотя бы один подходящий вариант расположения.

Все улицы направлены вдоль прямых линий.

Горизонтальные улицы: $A-B-C-D$, $E-F-G$, $H-I-J-K$.

Вертикальные улицы: $A-E-H$, $B-F-I$, $D-G-J$.

Наклонные улицы: $H-F-C$, $C-G-K$.



Ответ: B, G, H .

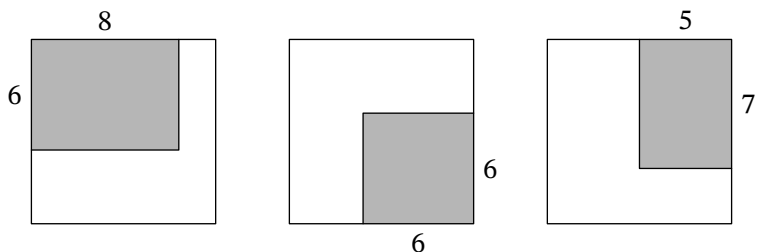
Решение. Подойдёт вариант, если поставить полицейских на перекрёстках B, G, H . Можно показать, что это единственный возможный вариант.

Поскольку вертикальных улиц всего три, и на каждой из них должно быть по полицейскому, то на перекрёстках C и K полицейских точно нет. Поэтому на перекрёстке G точно должен быть полицейский. Тогда на улице $E-F-G$ полицейских больше нет (поскольку на улицах $A-B-C-D$ и $H-I-J-K$ есть хотя бы по одному полицейскому). На улице $C-F-H$ должен быть полицейский, и его можно поставить только на перекрёстке H . Незакрытой остаются улицы $A-B-C-D$ и $B-F-I$, поэтому третьего полицейского нужно поставить на перекрёстке B . \square

Задача 5.4. Директор школы, завхоз и родительский комитет, не договорившись друг с другом, купили по ковру для школьного актового зала размером 10×10 . Подумав, что же делать, они решили положить все три ковра так, как показано на картинке: первый ковер

6×8 — в один угол, второй ковёр 6×6 — в противоположный угол и третий ковёр 5×7 — в один из оставшихся углов (все размеры указаны в метрах).

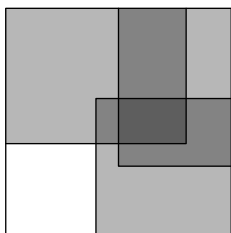
Найдите площадь части зала, накрытой коврами в три слоя (ответ дайте в квадратных метрах).



Ответ: 6.

Решение. Все размеры будем считать в метрах, а площадь — в квадратных метрах.

Посмотрим на перекрытие второго и третьего ковров. Это будет прямоугольник 5×3 (5 по горизонтали, 3 по вертикали), прилегающий к правой стороне квадратной комнаты, 4 — расстояние от верхней стороны, 3 — от нижней.



С первым ковром этот прямоугольник пересекается по горизонтали между 5-м и 8-м метрами от левой стороны квадратной комнаты, по вертикали — между 4-м и 6-м метрами от верхней стороны. В итоге получается прямоугольник 2×3 , площадь которого равна 6. \square

Задача 5.5. На кружки по математике записалось несколько школьников. Их хотят распределить по группам равномерно — таким образом, чтобы количество учеников в любых двух группах отличалось не более чем на 1.

В результате такого равномерного деления получилось 6 групп, среди которых ровно 4 группы по 13 учеников. Сколько всего могло быть школьников? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 76 или 80.

Решение. Так как количество учеников в группах отличается не более, чем на 1, то в оставшихся двух группах может быть по 12 или по 14 учеников (ясно, что групп из 12 и 14 уче-

ников одновременно быть не может). Значит, общее количество учеников может быть равно $13 \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 76$ или $13 \cdot 4 + 14 \cdot 2 = 80$. \square

Задача 5.6. Несколько камней разложены в 5 кучек. Известно, что

- в пятой кучке камней в шесть раз больше, чем в третьей;
- во второй кучке камней вдвое больше, чем в третьей и пятой вместе взятых;
- в первой кучке камней втрое меньше, чем в пятой, и на 10 меньше, чем в четвёртой;
- в четвёртой кучке камней в два раза меньше, чем во второй.

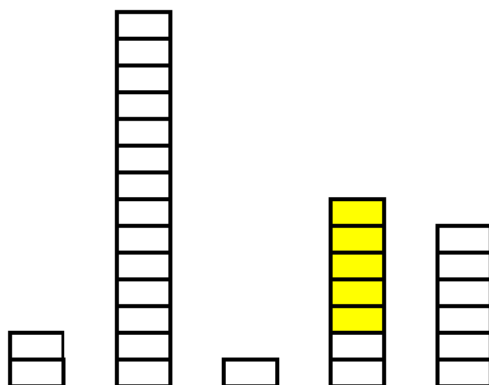
Сколько всего суммарно камней в этих пяти кучках?

Ответ: 60.

Решение. Обозначим количество камней в третьей кучке в виде прямоугольника. Тогда, так как в пятой кучке камней в 6 раз больше, то можно представить это в виде 6 прямоугольников. Во второй кучке количество камней вдвое больше, чем в третьей и пятой вместе, то есть $(1 + 6) \cdot 2 = 14$ прямоугольников. В первой втрое меньше, чем в пятой, то есть $6 : 3 = 2$ прямоугольника. В четвёртой в два раза меньше, чем во второй, то есть $14 : 2 = 7$ прямоугольников.

При этом также известно, что в первой кучке камней на 10 меньше, чем в четвёртой. Тогда 5 прямоугольников соответствуют 10 камням. Значит, 1 прямоугольник = 2 камня.

Всего $2 + 14 + 1 + 7 + 6 = 30$ прямоугольников. Это $30 \cdot 2 = 60$ камней.



\square

Задача 5.7. После чемпионата мира по хоккею три журналиста написали статью о сборной Германии — каждый для своей газеты.

- Первый написал: «Сборная Германии за весь чемпионат забила больше 10, но меньше 17 шайб».

- Второй: «Сборная Германии забила больше 11, но меньше 18 шайб за весь чемпионат».
- Третий: «Сборная Германии забила нечётное количество шайб за весь чемпионат».

В итоге оказалось, что правы были только два журналиста. Сколько шайб могла забить сборная Германии на чемпионате? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 11, 12, 14, 16 или 17.

Решение. Рассмотрим все возможные варианты.

Если шайб забито не больше 10, то для нечётного количества шайб будет верно одно утверждение, а для чётного — ноль. Не подходит.

Если забито 11 шайб, то верны ровно два утверждения. Подходит.

Если шайб забито от 12 до 16, то для нечётного количества шайб верны все три утверждения, а для чётного — два. Подходят только чётные значения: 12, 14, 16.

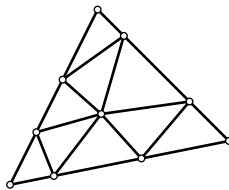
Если забито 17 шайб, то верны ровно два утверждения. Подходит.

Если шайб забито не меньше 18, то для нечётного количества шайб верно одно утверждение, а для чётного — ноль. Не подходит.

Итак, нам подходят пять значений: 11, 12, 14, 16, 17. □

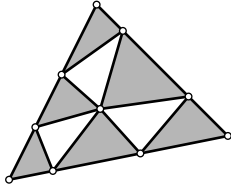
Задача 5.8. Внутри большого треугольника периметра 120 провели несколько отрезков, которые разделили его на девять меньших треугольников, как показано на рисунке. Оказалось, что периметры всех девяти маленьких треугольников равны между собой. Чему они могут быть равны? Укажите все возможные варианты.

Периметр фигуры — сумма длин всех её сторон.



Ответ: 40.

Решение. Сложим периметры шести маленьких треугольников, отмеченных серым на следующем рисунке:



Из полученного значения вычтем периметры остальных трёх маленьких белых треугольников. Поскольку периметры маленьких треугольников равны, то, с одной стороны, получится утроенный периметр маленького треугольника. С другой стороны, в такой сумме будут только отрезки, составляющие периметр большого треугольника, равный 120. Значит, периметр маленького треугольника равен $120 : 3 = 40$. \square

6 класс

Задача 6.1. Пять последовательных натуральных чисел написаны в ряд. Сумма трёх самых маленьких из них равна 60. Чему равна сумма трёх самых больших?

Ответ: 66.

Решение. Пятое число на 4 больше первого, а четвёртое — на 2 больше второго. Тогда сумма трёх самых больших чисел на $2 + 4 = 6$ больше суммы трёх самых маленьких, и она равна $60 + 6 = 66$. \square

Задача 6.2. Аркадий, Борис, Вера, Галя, Даня и Егор встали в хоровод.

- Даня встал рядом с Верой, справа от неё,
- Галя встала напротив Егора,
- Егор встал рядом с Даней,
- Аркадий и Галя не захотели стоять рядом.

Кто стоит рядом с Борисом?

Ответ: Аркадий и Галя.

Решение. Из первого и третьего утверждения следует, что Вера, Даня, Егор стоят именно в таком порядке против часовой стрелке. Поскольку всего в хороводе шесть человек, то напротив Егора, то есть слева от Веры, стоит Галя. Остались Аркадий и Борис. Поскольку Аркадий и Галя не стоят рядом, то слева от Гали стоит Борис, а слева от Бориса — Аркадий. Получается такое расположение:

Борис
 Галя Аркадий
 Вера Егор
 Даня

Рядом с Борисом — Аркадий и Галя. □

Задача 6.3. В клетках таблицы 4×4 расставлены числа 1, 2, 3, 4 так, что

- каждое из чисел встречается в каждой строке и в каждом столбце;
- во всех четырёх частях, изображённых на рисунке, суммы чисел равны.

По двум числам на рисунке определите, в каких клетках стоят двойки.

	1	2	3	4
A				
B				
C		1		
D	4			

Постройте соответствие.

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • В строчке A двойка стоит • В строчке B двойка стоит • В строчке C двойка стоит • В строчке D двойка стоит | <ul style="list-style-type: none"> • в столбце с номером 1. • в столбце с номером 2. • в столбце с номером 3. • в столбце с номером 4. |
|--|--|

Ответ: В строчке A двойка стоит в столбце 2, в строчке B — 1, в строчке C — 4, в строчке D — 3.

Решение. Сначала найдём, чему равна сумма чисел в каждой из частей, на которые разделена доска. В каждом столбце по разу встречаются числа от 1 до 4. Их сумма равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, а во всей доске сумма всех чисел равна $10 \cdot 4 = 40$. Поскольку во всех частях суммы чисел равны, то они равны $40 : 4 = 10$.

Посмотрим на левый нижний уголок из трёх клеток. Одно из чисел — четвёрка, поэтому сумма двух других должна быть равна $10 - 4 = 6$. При этом эти два числа не могут быть четвёрками, так как четвёрка уже есть с ними в одной линии. Единственный возможный вариант — две тройки. Получаем, что в клетках C1 и D2 стоят тройки.

В правом верхнем трёхклеточном уголке сумма трёх чисел тоже равна 10. Такая сумма может быть получена либо как $4 + 3 + 3$, либо как $4 + 4 + 2$. При этом в первом случае в клетке A4 должна быть четвёрка, а во втором — двойка.

В клетках $C3$ и $C4$ в каком-то порядке стоят двойка и четвёрка, в клетках $D3$ и $D4$ — единица и двойка. Тогда в клетке $B3$ число равно $10 - 2 - 4 - 1 - 2 = 1$.

В клетках $A4$ и $B4$ записаны либо четвёрка и тройка, либо четвёрка и двойка. Четвёрка там в любом случае есть, поэтому в клетке $C4$ четвёрки быть не может, значит, в $C4$ двойка, а в $C3$ четвёрка.

В правом столбце двойка уже есть, значит, в клетке $D4$ единица, а в клетке $D3$ двойка.

Рассмотрим опять самый правый столбец. Там уже определились единица и двойка, значит, в оставшихся двух верхних клетках тройка и четвёрка, причём обязательно в клетке $A4$ четвёрка, а в клетке $B4$ тройка. Также мы сразу можем определить, что в клетке $A3$ тройка.

В верхней строке уже есть четвёрка. Во втором столбце не хватает двойки и четвёрки. Получается, что в клетке $A2$ двойка, а в клетке $B2$ четвёрка.

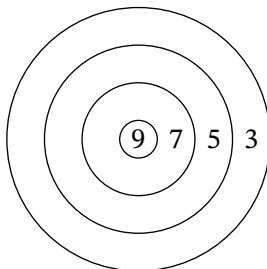
Оставшиеся пустые верхние клетки первого столбца заполняются без труда: в клетке $A1$ единица, а в клетке $B1$ двойка.

	1	2	3	4
A	1	2	3	4
B	2	4	1	3
C	3	1	4	2
D	4	3	2	1

Итак, двойки находятся в клетках $A2$, $B1$, $C4$, $D3$. □

Задача 6.4. Миша летом на даче изготовил себе самодельный дартс. Круглая доска разделена окружностями на несколько секторов — в неё можно кидать дротики. За попадание даётся столько очков, сколько написано в секторе, как указано на рисунке.

Миша кидал 3 раза по 8 дротиков. Во второй раз он выбил в 2 раза больше очков, чем в первый, а в третий раз в 1,5 раза больше, чем во второй. Сколько он выбил очков во второй раз?



Ответ: 48.

Решение. Наименьшая возможная сумма очков, которую можно выбить восемью дротиками, равна $3 \cdot 8 = 24$. Тогда во второй раз Миша выбил не меньше $24 \cdot 2 = 48$ очков, а в третий — не меньше $48 \cdot 1,5 = 72$.

С другой стороны, $72 = 9 \cdot 8$ — это наибольшая возможная сумма очков, которую можно выбить восемью дротиками. Значит, в третий раз Миша выбил ровно 72 очка, а во второй — ровно 48. \square

Задача 6.5. Несколько одноклассников вместе съели торт. Лёша съел больше всех — $\frac{1}{11}$ от всего торта, а Алёна — меньше всех — $\frac{1}{14}$ от всего торта. Сколько одноклассников ели торт? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 12 или 13.

Решение. Если бы все в классе съели по $\frac{1}{11}$ торта, как Лёша, то человек в классе было бы 11. Но так как каждый, кроме Лёши, съел меньше $\frac{1}{11}$, то всего людей больше 11, то есть хотя бы 12.

Аналогичными соображениями покажем, что людей не больше 13. Если бы все в классе съели по $\frac{1}{14}$ торта, как Алёна, то человек в классе было бы 14. Но так как все, кроме Алёны, съели больше $\frac{1}{14}$, то всего людей меньше 14, то есть не больше 13.

Осталось два возможных варианта: 12 и 13. Покажем, что они оба возможны.

После того, как Лёша взял $\frac{1}{11}$ торта, а Алёна взяла $\frac{1}{14}$ торта, всё оставшееся мы раздадим поровну всем остальным (остальных — 10 или 11 человек). Поймём, почему каждому из них достанется менее $\frac{1}{11}$ торта, но более $\frac{1}{14}$ торта.

Предположим, что каждому из остальных досталось не менее $\frac{1}{11}$ торта. Кроме Алёны человек в классе не менее 11, каждый из них съел суммарно не менее $\frac{1}{11}$ торта. Тогда суммарно все, кроме Алёны, съели не менее $\frac{11}{11} = 1$, то есть целый торт. Но тогда Алёне бы ничего не досталось, противоречие. Значит, всем остальным досталось менее $\frac{1}{11}$ торта.

Предположим, что каждому из остальных досталось не более $\frac{1}{14}$ торта. Кроме Лёши человек в классе не более 12, каждый из них съел суммарно не более $\frac{1}{14}$ торта. Тогда суммарно все, кроме Лёши, съели не более $\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$ торта. Тогда оставшиеся не менее $\frac{1}{7}$ торта должен съесть Лёша, но он съел всего лишь $\frac{1}{11} < \frac{1}{7}$, противоречие. Значит, всем остальным досталось более $\frac{1}{14}$ торта. \square

Задача 6.6. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 65 жителей острова собрались на заседание. Все они по очереди сделали заявление: «Среди сделанных ранее заявлений истинных ровно на 20 меньше, чем ложных». Сколько рыцарей было на этом заседании?

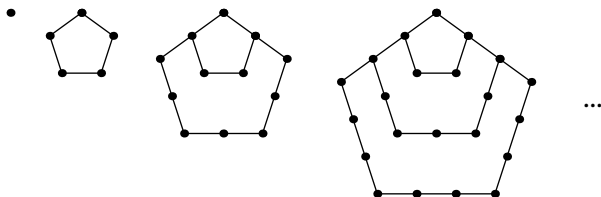
Ответ: 23.

Решение. Первые 20 человек — лжецы, потому что до них всего было сделано не больше 19 заявлений, а значит, истинных не может быть ровно на 20 меньше, чем ложных.

Далее 21-й человек говорит правду (ведь до него было ровно 20 ложных заявлений), значит, он рыцарь. Затем 22-й говорит неправду (до него было 20 ложных и 1 истинное заявление), значит, он лжец. Далее 23-й человек говорит правду (ложных заявлений опять стало на 20 больше, чем истинных), значит, 23-й рыцарь, и так далее.

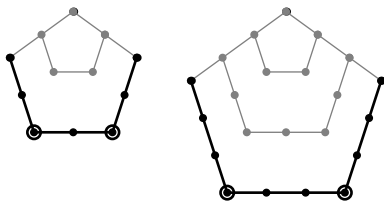
Среди людей, начиная с 21-го, те, кто с нечётными номерами, — рыцари, а те, кто с чётными, — лжецы. Среди чисел от 21 до 65 включительно ровно 23 нечётных, поэтому и рыцарей на заседании было ровно 23. \square

Задача 6.7. Аня расставляет камешки на песке. Сначала она поставила один камень, потом добавила камешки, чтобы получился пятиугольник, затем сделала из камешков внешний большой пятиугольник, после этого ещё один внешний пятиугольник и т. д., как на рисунке. Количество камней, которые у неё были расставлены на первых четырёх картинках: 1, 5, 12 и 22. Если продолжать составлять такие картинки дальше, то сколько камней будет на 10-й картинке?



Ответ: 145.

Решение. На второй картинке 5 камней. Чтобы из неё получить третью картинку, нужно добавить три отрезка с тремя камнями на каждом. Угловые камни считаются два раза, поэтому всего камней на третьей картинке будет $5 + 3 \cdot 3 - 2 = 12$.



Чтобы из третьей картинки получить четвёртую, нужно добавить три отрезка с четырьмя камнями на каждом. Угловые камни считаются два раза, поэтому всего камней будет $12 + 3 \cdot 4 - 2 = 22$.

Аналогично посчитаем количество камней на каждой из остальных картинок:

на 5-й: $22 + 3 \cdot 5 - 2 = 35$;

на 6-й: $35 + 3 \cdot 6 - 2 = 51$;

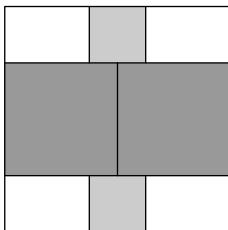
на 7-й: $51 + 3 \cdot 7 - 2 = 70$;

на 8-й: $70 + 3 \cdot 8 - 2 = 92$;

на 9-й: $92 + 3 \cdot 9 - 2 = 117$;

на 10-й: $117 + 3 \cdot 10 - 2 = 145$. \square

Задача 6.8. Крест, состоящий из двух одинаковых больших и двух одинаковых маленьких квадратов, поместили внутрь ещё большего квадрата. Вычислите в сантиметрах сторону самого большого квадрата, если площадь креста — 810 см^2 .



Ответ: 36.

Решение. Длины стороны двух больших квадратов вместе дают сторону внешнего (самого большого) квадрата. Значит, стороны больших квадратов равны $\frac{1}{2}$ стороны внешнего квадрата, а площадь каждого из них равна $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ площади внешнего.

Длины сторон двух меньших квадратов вместе со стороной большого квадрата в сумме дают сторону внешнего квадрата. Значит, стороны меньших квадратов равны $\frac{1}{4}$ стороны внешнего квадрата, а площадь каждого из них равна $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ площади внешнего.

Общая площадь креста равна $2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{2}{16} = \frac{10}{16}$ площади внешнего квадрата и равна 810 см^2 . Значит, $\frac{1}{16}$ площади внешнего квадрата равна $810 : 10 = 81 \text{ см}^2$, а площадь всего внешнего квадрата равна $81 \cdot 16 = (9 \cdot 4)^2 \text{ см}^2$. Тогда его сторона равна $9 \cdot 4 = 36 \text{ см}$. \square

7 класс

Задача 7.1. Саша и Ваня играют в игру. Саша задаёт Ване вопросы. Если Ваня отвечает на вопрос правильно, то Саша даёт ему 7 конфет. Если же Ваня отвечает неправильно, то он даёт Саше 3 конфеты. После того, как Саша задал 50 вопросов, оказалось, что у каждого из них столько же конфет, сколько было в начале. На сколько вопросов Ваня ответил правильно?

Ответ: 15.

Решение. Пусть Ваня ответил правильно на x вопросов, тогда неправильно он ответил на $50 - x$ вопросов. Значит, в процессе игры Ваня получил $7x$ конфет и отдал $3(50 - x)$ конфет. Поскольку у обоих ребят после игры общее количество конфет не изменилось, получаем $7x = 3(50 - x)$. Решая его, находим $x = 15$.

Замечание. Тот же ответ можно было получить, поняв, что для «уравнивания конфет» Ваня каждые 3 правильных ответа должен «компенсировать» 7 неправильными. □

Задача 7.2. На День учителя благодарные ученики подарили Егору Сергеевичу несколько железнодорожных билетов, чтобы он совершил путешествие по России.

Билеты были для проезда между следующими парами городов:

- Санкт-Петербург и Тверь,
- Ярославль и Нижний Новгород,
- Москва и Казань,
- Нижний Новгород и Казань,
- Москва и Тверь,
- Москва и Нижний Новгород.

Билеты были с открытой датой: по каждому билету можно проехать один раз в любую сторону между городами.

Егор Сергеевич в итоге смог побывать ровно по одному разу в шести городах. В каком городе могло начаться путешествие? Укажите все возможные варианты.

Ответ: Санкт-Петербург или Ярославль.

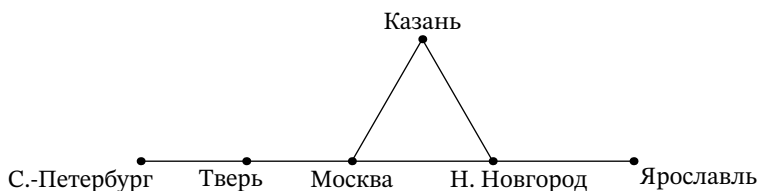


Рис. 1: к решению задачи 7.2

Решение. Все доступные пути изображены на рис 1. Из Санкт-Петербурга и Ярославля выходит по одной дороге, поэтому каждый из этих городов должен быть в пути начальным или конечным.

Оба варианта возможны. Маршрут Санкт-Петербург — Тверь — Москва — Казань — Нижний Новгород — Ярославль начинается в Санкт-Петербурге. Если проехать этот маршрут в обратном порядке, то первым городом будет Ярославль. □

Задача 7.3. В клетках квадрата расставили числа так, что суммы чисел в каждой вертикали, горизонтали и каждой диагонали из трёх клеток равны. Затем некоторые числа скрыли. Чему равна сумма чисел в двух закрашенных клетках?

16		
		10
8		12

Ответ: 34.

Решение. Пусть a — число в правой верхней клетке, b — число в центральной клетке.

У суммы диагонали с числом 8 с суммой чисел в правом столбце есть общее слагаемое a , поэтому $8 + b = 10 + 12$, откуда $b = 14$. У сумм трёх чисел по обеим диагоналям есть общее число b , поэтому $16 + 12 = 8 + a$, откуда $a = 20$. Следовательно, $a + b = 20 + 14 = 34$. \square

Замечание. Можно расставить и остальные числа, чтобы убедиться, что условие задачи корректно:

16	6	20
18	14	10
8	22	12

Задача 7.4. Маша и Оля купили в магазине много одинаковых ручек для нового учебного года. Известно, что одна ручка стоит целое число рублей, большее 10. Маша купила ручек ровно на 357 рублей, а Оля — ровно на 441 рубль. Сколько суммарно ручек они купили?

Ответ: 38.

Решение. Пусть ручка стоит r рублей. Тогда числа 357 и 441 делятся на d . Поскольку наибольший общий делитель чисел $357 = 3 \cdot 7 \cdot 17$ и $441 = 3^2 \cdot 7^2$ равен $3 \cdot 7$, то и 21 делится на r . Поскольку $r > 10$, то $r = 21$. Тогда всего ручек было куплено $\frac{357}{21} + \frac{441}{21} = 17 + 21 = 38$. \square

Задача 7.5. В каждую комнату отеля можно поселить не более 3 человек. Менеджер отеля знает, что скоро приедет группа из 100 футбольных фанатов, которые болеют за три разные команды. В одну комнату можно селить только мужчин или только женщин; также нельзя вместе селить фанатов разных команд. Сколько комнат нужно забронировать, чтобы точно расселить всех фанатов?

Ответ: 37.

Решение. Все фанаты делятся на шесть групп: мужчины/женщины, болеющие за первую команду; мужчины/женщины, болеющие за вторую команду; мужчины/женщины, болеющие за третью команду. В одну комнату можно селить только людей из одной группы.

Количество людей в каждой из шести групп поделим с остатком на 3. Если в какой-то группе получился остаток 1, поселим любого 1 человека из неё в отдельный номер. Если получился остаток 2, поселим любых 2 человек из неё в отдельный номер. Теперь в каждой группе количество нерасселённых фанатов делится на 3.

После того, как мы расселили остатки каждой группы, осталось сколько-то нерасселённых людей. Это суммарное количество не больше 100 и не меньше 88 (ведь все шесть остатков в сумме дают не более $6 \cdot 2 = 12$, а $100 - 12 = 88$). При этом это число делится на 3, поэтому оно равно одному из значений 90, 93, 96, 99 (и всех соответствующих людей можно расселить в комнаты по три человека). Рассмотрим несколько случаев.

- Если осталось 90 человек, то им нужно $90 : 3 = 30$ комнат, остальным 10 людям из 6 групп точно хватит 6 комнат. Всего нужно не больше 36 комнат.
- Если осталось 93 человека, то им нужна $93 : 3 = 31$ комната, остальным 7 людям из 6 групп точно хватит 6 комнат. Всего нужно не больше 37 комнат.
- Если осталось 96 человек, то им нужно $96 : 3 = 32$ комнаты, остальным 4 людям точно хватит 4 комнаты. Всего нужно не больше 36 комнат.
- Если осталось 99 человек, то им нужно $99 : 3 = 33$ комнаты, оставшемуся одному точно хватит 1 комнаты. Всего нужно не больше 34 комнат.

Таким образом, 37 комнат точно хватит.

Также приведём пример, когда необходимо хотя бы 37 комнат. Пусть распределение людей по шести группам такое: 20, 16, 16, 16, 16, 16. Для группы из 20 человек необходимо выделить не менее 7 комнат, для каждой из остальных — не менее 6 комнат. Итого необходимо не менее $7 + 6 \cdot 5 = 37$ комнат. \square

Задача 7.6. В классе учатся 25 школьников, каждый из которых либо отличник, либо хулиган. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут.

Однажды 5 учеников этого класса сказали: «Если я перейду в другой класс, то среди оставшихся учеников будет больше половины хулиганов».

Каждый из оставшихся 20 сказал: «Если я перейду в другой класс, то среди оставшихся учеников хулиганов будет в три раза больше, чем отличников».

Сколько отличников учится в классе? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 5 или 7.

Решение. Назовём *первой группой* всех людей, сказавших первую фразу, и *второй группой* всех людей, сказавших вторую фразу. Рассмотрим два случая.

- Пусть во второй группе есть хотя бы отличник, выберем любого из них. Среди 24 остальных людей хулиганов в три раза больше, чем отличников, поэтому всего хулиганов ровно 18, а отличников ровно $6 + 1 = 7$.

Заметим, что такая ситуация возможна: в первой группе было 5 отличников, сказавших правду (ведь $18 > \frac{24}{2}$), а во второй группе было 2 отличника, сказавших правду (ведь $18 = 3 \cdot 6$), а также 18 хулиганов, сказавших неправду (ведь $17 \neq 3 \cdot 7$).

- Пусть во второй группе вообще нет отличников, тогда всего хулиганов хотя бы 20. Тогда любой человек из первой группы сказал правду (ведь и 19, и 20 составляют больше половины от 24), поэтому все 5 человек в первой группе — отличники, и отличников в классе ровно 5.

Заметим, что такая ситуация возможна: в первой группе было 5 отличников, сказавших правду (ведь $20 > \frac{24}{2}$), а во второй группе было 20 хулиганов, сказавших неправду (ведь $19 \neq 3 \cdot 5$). □

Задача 7.7. Числа от 1 до 200 в произвольном порядке расставили на окружности так, что расстояния между рядом стоящими на окружности числами одинаковы.

Для любого числа верно следующее: если рассмотреть 99 чисел, стоящих от него по часовой стрелке, и 99 чисел, стоящих от него против часовой стрелки, то в обеих группах будет поровну чисел, которые меньше его. Какое число стоит напротив числа 113?

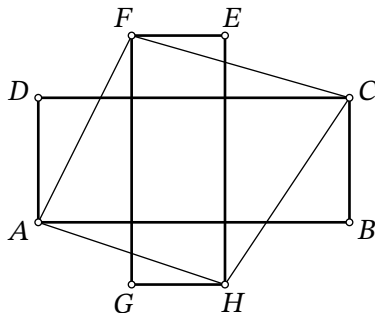
Ответ: 114.

Решение. Рассмотрим число 2. Меньше него только число 1. Так как оно такое единственное, то оно не может быть ни в одной из групп относительно числа 2. Значит, 1 должно быть напротив 2.

Рассмотрим число 4. Чисел, которые меньше него, три — нечётное количество. Значит, одно из них не должно входить ни в одну из групп относительно числа 4, т. е. должно быть напротив. Так как 1 и 2 уже стоят друг напротив друга, то напротив 4 стоит 3.

Продолжая аналогичные рассуждения и дальше, получаем, что напротив любого чётного числа стоит нечётное число, которое на 1 меньше его. Таким образом, напротив числа 114 стоит число 113. И наоборот: напротив 113 стоит 114. □

Задача 7.8. На прямоугольном листе бумаги нарисовали картинку в форме «креста» из двух прямоугольников $ABCD$ и $EFGH$, стороны которых параллельны краям листа. Известно, что $AB = 9$, $BC = 5$, $EF = 3$, $FG = 10$. Найдите площадь четырёхугольника $AFCH$.



Ответ: 52,5.

Решение. Два исходных прямоугольника в пересечении образуют «маленький» прямоугольник со сторонами 5 и 3. Его площадь равна 15.

Продлим отрезки DA , GH , BC , EF до прямых. Они образуют «большой» прямоугольник со сторонами 9 и 10, содержащий «крест» (рис. 2). Его площадь равна 90.

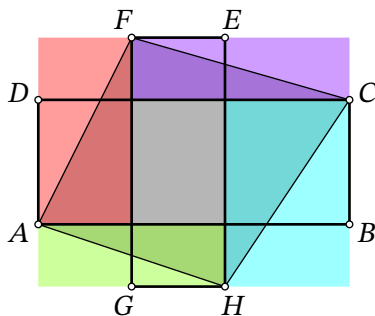


Рис. 2: к решению задачи 7.8

Площадь «большого» прямоугольника состоит из площади «маленького» и площади «кольца», которое, в свою очередь, можно представить как четыре прямоугольника с диагоналями AF , FC , CH , HA . Диагонали делят площадь каждого из этих прямоугольников пополам. Четырёхугольник $AFCH$ состоит из одной половины каждого такого прямоугольника и из «маленького» прямоугольника.

Посчитаем площадь $AFCH$. Площадь «кольца» из четырёх прямоугольников равна разности площадей «большого» и «маленького», то есть $90 - 15 = 75$. Общая площадь четырёх треугольников равна $75 : 2 = 37,5$. Тогда искомая площадь равна $15 + 37,5 = 52,5$. \square

8 класс

Задача 8.1. На клавиатуре компьютера Пети *неисправна* одна клавиша с некоторой циф-

рой (все остальные клавиши работают хорошо). Неисправная клавиша срабатывает только на каждое второе нажатие. Например, в случае неисправной клавиши «2» при вводе числа 12125252 получится число 112552.

Петя попробовал ввести 10-значное число, но на экране появилось 7-значное число

7479189.

Клавиша с какой цифрой могла быть неисправна? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 7 или 9.

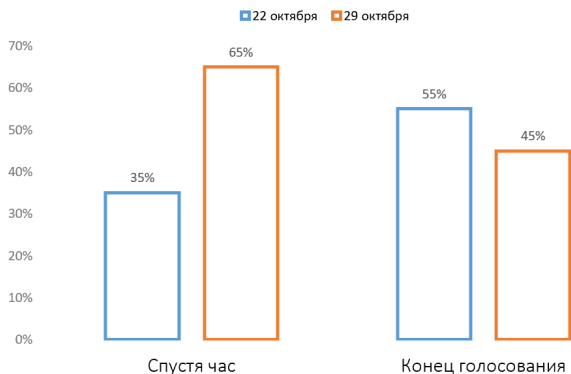
Решение. Не напечатались $10 - 7 = 3$ цифры. Это означает, что на неисправную клавишу нажимали хотя бы 5 раз, при этом не сработали первое, третье и пятое нажатие, но точно сработали второе и четвёртое. Цифр, встречающихся хотя бы дважды, на экране ровно две: 7 и 9. Ясно, что клавиша с 7 могла быть неисправной, например, в случае ввода числа 7774779189, а клавиша с 9 могла быть неисправной, например, в случае ввода числа 7479991899. \square

Задача 8.2. В чате учеников одной из школ проходило голосование: «В какой день проводить дискотеку: 22 или 29 октября?»

На графике изображено, как голоса распределились спустя час после начала голосования.

Затем в голосовании приняли участие ещё 80 человек, которые голосовали только за 22 октября. После этого голосование завершилось. Итоговое распределение голосов также изображено на графике.

Сколько человек приняли участие в голосовании?



Ответ: 260.

Решение. Пусть спустя час после начала проголосовали x человек. Из левого графика ясно, что за 22 октября проголосовали $0,35x$ человек, а за 29 октября — $0,65x$ человек.

По итогу всего проголосовавших было $x + 80$ человек, из них 45% проголосовали за 29 октября. Поскольку их по-прежнему осталось $0,65x$, получаем уравнение

$0,65x = 0,45(x + 80)$, откуда находим $x = 180$. Следовательно, всего в голосовании приняли участие $180 + 80 = 260$ человек. \square

Задача 8.3. В классе учатся 29 школьников: несколько отличников и несколько хулиганов. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут.

Все ученики этого класса сели за круглый стол.

- Несколько учеников сказали: «Рядом со мной ровно один хулиган».
- Все остальные ученики сказали: «Рядом со мной ровно два хулигана».

Какое наименьшее количество хулиганов может быть в классе?

Ответ: 10.

Решение. Если бы по кругу нашлись три отличника подряд, средний из них точно сказал бы неправду. Следовательно, среди любых трёх подряд идущих человек должен быть хотя бы один хулиган.

Выберем произвольного хулигана. Дадим ему номер 29, а всех следующих за ним по часовой стрелке людей пронумеруем числами от 1 до 28. Поскольку в каждой из непересекающихся групп (1, 2, 3), (4, 5, 6), ..., (25, 26, 27), (29) есть хотя бы один хулиган, то всего хулиганов хотя бы $\frac{27}{3} + 1 = 10$.

Заметим также, что хулиганов могло быть ровно 10. Опять же, пронумеровав людей по часовой стрелке числами от 1 до 29, пусть ученики с номерами 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 29 — это хулиганы, а ученики со всеми остальными номерами — отличники. При этом все отличники, кроме отличника с номером 28, сказали первую фразу, а отличник с номером 28 и все хулиганы сказали вторую фразу. Несложно видеть, что все условия задачи выполняются. \square

Задача 8.4. Точки D и E отмечены соответственно на сторонах AC и BC треугольника ABC так, что $AD = EC$. Оказалось, что $BD = ED$, $\angle BDC = \angle DEB$. Найдите длину отрезка AC , если известно, что $AB = 7$ и $BE = 2$.

Ответ: 12.

Решение. Заметим, что треугольники DEC и BDA равны. Действительно, $DE = BD$, $EC = DA$ и $\angle DEC = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - \angle BDC = \angle BDA$. Отсюда следует, что $DC = AB = 7$ и $\angle DCE = \angle BAD$ (рис. 3). Из последнего равенства углов следует, что треугольник ABC является равнобедренным, $7 = AB = BC = 2 + EC$, откуда получаем $5 = EC = AD$ и $AC = AD + DC = 5 + 7 = 12$. \square

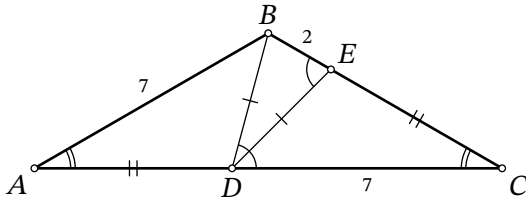


Рис. 3: к решению задачи 8.4

Задача 8.5. На доске были написаны числа $1, 2, 3, \dots, 235$. Петя стёр несколько из них. Оказалось, что среди оставшихся чисел никакое *не* делится на разность никаких двух других. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

Ответ: 118.

Решение. На доске могло остаться 118 нечётных чисел: любое из них не делится на разность никаких двух других, потому что эта разность чётна.

Предположим, могло остаться хотя бы 119 чисел. Рассмотрим 118 множеств: 117 пар $(1, 2), (3, 4), (5, 6), \dots, (233, 234)$ и одно число 235. По принципу Дирихле в одном из множеств осталось хотя бы два числа. Это означает, что среди оставшихся чисел найдутся два последовательных, но тогда их разность, равная 1, является делителем любого другого оставшегося числа. Противоречие. \square

Задача 8.6. В таблице 3×3 расставлены действительные числа. Оказалось, что произведение чисел в любой строке и любом столбце равно 10, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 3. Найдите число, стоящее в центральной клетке.

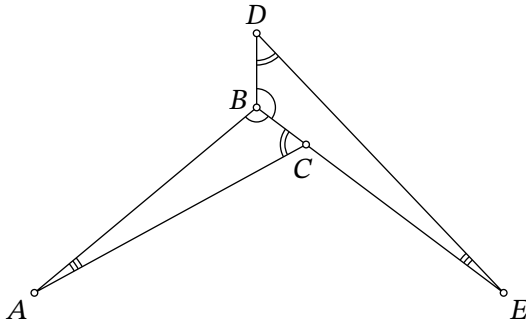
Ответ: 0,00081.

Решение.

Обозначим числа в квадрате слева направо: пусть a, b, c — числа в первой строчке, d, e, f — во второй строчке, g, h, i — в третьей строчке. Заметим, что

$$e = \frac{abde \cdot bcef \cdot degh \cdot efhi}{abc \cdot def \cdot ghi \cdot beh \cdot def} = \frac{3^4}{10^5} = 0,00081. \quad \square$$

Задача 8.7. На рисунке изображены два равных треугольника ABC и EBD . Оказалось, что $\angle DAE = \angle DEA = 37^\circ$. Найдите угол BAC .



Ответ: 7.

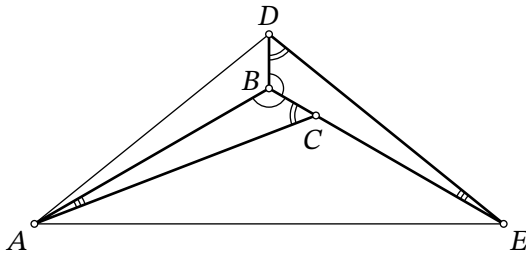


Рис. 4: к решению задачи 8.7

Решение. Проведём отрезки AD и AE (рис. 4). Поскольку $\angle DAE = \angle DEA = 37^\circ$, треугольник ADE является равнобедренным, $AD = DE$.

Заметим, что треугольник ABD равен треугольнику EBD по трём сторонам: BD — общая сторона, $AD = DE$, $AB = BE$ из равенства треугольников ABC и EBD . Тогда $\angle DAB = \angle BED = \angle BAC$ и $\angle ABD = \angle DBE = \angle ABE = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ$.

Поскольку $AB = BE$, треугольник ABE является равнобедренным с углом 120° , поэтому $\angle BAE = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$. Следовательно,

$$\angle BAC = \angle DAB = \angle DAE - \angle BAE = 37^\circ - 30^\circ = 7^\circ. \quad \square$$

Задача 8.8. Сколькими способами можно покрасить все натуральные числа от 1 до 200 в красный и синий цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных чисел не равнялась степени двойки?

Ответ: 256.

Решение.

Лемма. Если сумма двух натуральных чисел равна степени двойки, то степени вхождения 2 в разложение на простые множители этих двух чисел одинаковы.

Доказательство леммы. Пусть сумма чисел $a = 2^\alpha \cdot a_1$ и $b = 2^\beta \cdot b_1$, где a_1 и b_1 нечётны, равна 2^n . Поскольку $2^n = a + b > a \geq 2^\alpha$, то $n > \alpha$. Предположим, что α и β различны, не нарушая общности, $\alpha > \beta$. Тогда $b = 2^\beta \cdot b_1 = 2^n - 2^\alpha \cdot a_1 = 2^\alpha(2^{n-\alpha} - a_1)$ делится на 2^α . Но $\beta < \alpha$, противоречие. *Лемма доказана.*

Назовём раскраску в два цвета множества M *хорошей*, если сумма любых двух различных одноцветных чисел из множества M не равна степени двойки. Назовём раскраску в два цвета последовательности $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_t$ *чередующейся*, если любые два соседних числа в этой последовательности покрашены в разные цвета.

Рассмотрим 8 множеств чисел, имеющих в своём разложении на простые множители одинаковую степень двойки:

$$M_0 = \{1, 3, 5, \dots, 199\}, M_1 = \{2, 6, 10, \dots, 198\}, M_2 = \{4, 12, 20, \dots, 196\}, \dots, M_7 = \{128\}.$$

Докажем, что для каждого из этих 8 множеств существует ровно две хорошие раскраски, обе из которых — чередующиеся. Поскольку числа из разных множеств не дают в сумме степень двойки (это следует из леммы), мы получим, что всего хороших раскрасок чисел $1, 2, \dots, 200$ существует ровно $2^8 = 256$.

Рассмотрим $M_k = \{2^k, 3 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k, \dots\}$. Рассмотрим множество чисел M_k^* , в котором содержатся все числа множества M_k , разделённые на 2^k . Очевидно, что любой хорошей раскраске множества M_k соответствует ровно одна хорошая раскраска множества M_k^* (если сумма двух каких-то чисел была степенью двойки, то и сумма этих чисел, разделённых на 2^k , также будет степенью двойки, и наоборот). Достаточно доказать, что для M_k^* существует ровно две хорошие раскраски, обе из которых — чередующиеся.

Очевидно, M_k^* состоит из нескольких первых нечётных натуральных чисел (возможно, из одного). Не нарушая общности, число 1 в нём — красное. Поскольку $1 + 3 = 2^2$, число 3 — синее. Поскольку $5 + 3 = 7 + 1 = 2^3$, число 5 — красное, а число 7 — синее. Так можно продолжать и дальше: если раскраска нечётных чисел от 1 до $2^s - 1$ — чередующаяся, то раскраска нечётных чисел от $2^s + 1$ до $2^{s+1} - 1$ — тоже чередующаяся (поскольку $(2^s + 1) + (2^s - 1) = (2^s + 3) + (2^s - 3) = \dots = (2^{s+1} - 1) + 1 = 2^{s+1}$). При этом числа $2^s - 1$ и $2^s + 1$ покрашены в разные цвета, поэтому и раскраска чисел от 1 до $2^{s+1} - 1$ — тоже чередующаяся. Итак, если число 1 — красное, то раскраска восстанавливается однозначно, и она является чередующейся. Очевидно, что если число 1 — синее, то раскраска тоже восстанавливается однозначно, и она тоже является чередующейся. Ясно также, что чередующиеся раскраски подходят: в них любые два различных одноцветных числа нечётны и имеют одинаковый остаток при делении на 4, поэтому их сумма больше 2 и не делится на 4, следовательно, не является степенью двойки. Других раскрасок нет. \square

Другое решение. Если два различных числа в сумме дают степень двойки, меньшее из них будем называть *родителем* большего. Докажем, что у степеней двойки нет родителей, а у остальных чисел ровно по одному родителю.

Действительно, рассмотрим число x , находящееся в диапазоне $2^{k-1} \leq x < 2^k$ для некоторого $k \geq 0$. Пусть один из его родителей — некоторое число $y < x$. Тогда $2^{k-1} \leq x <$

$x + y < 2x < 2^{k+1}$, откуда $x + y = 2^k$ (это должна быть какая-то степень двойки). Следовательно, родитель $y = 2^k - x$ для $x \neq 2^{k-1}$ определяется однозначно (а для $x = 2^{k-1}$ получаем $y = x$, что невозможно). С другой стороны, ясно, что если $x \neq 2^{k-1}$, то $2^k - x$ — это действительно родитель числа x ($2^k - x \leq 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1} < x$ и $2^k - x + x = 2^k$).

Теперь покажем, что любую покраску степеней двойки можно единственным образом продолжить до покраски всего данного множества чисел. Пусть все степени двойки из нашего множества уже покрашены в красный или синий цвета. Начнем идти по остальным числам по возрастанию (3, 5, 6, ...); когда мы дойдём до очередного числа, у него будет родитель, и он уже будет покрашен. Значит, мы можем покрасить текущее число единственным образом — в цвет, противоположный цвету его родителя. Так мы раскрасим все числа.

Полученная раскраска будет удовлетворять условию, так как в любой паре чисел, дающих в сумме степень двойки, большее число будет покрашено в цвет, противоположный цвету своего родителя, то есть меньшего числа пары.

Следовательно, количество способов раскрасить данный диапазон требуемым образом совпадает с количеством способов раскрасить степени двойки из диапазона произвольным образом. Так как всего у нас 8 степеней двойки (от 2^0 до 2^7), то способов ровно 2^8 . \square

9 класс

Задача 9.1. На острове живут красные, жёлтые, зелёные и синие хамелеоны.

- В пасмурный день либо один красный хамелеон меняет окрас на жёлтый цвет, либо один зелёный хамелеон — на синий цвет.
- В солнечный день либо один красный хамелеон меняет окрас на зелёный цвет, либо один жёлтый хамелеон — на синий цвет.

В сентябре было 18 солнечных и 12 пасмурных дней. При этом количество жёлтых хамелеонов увеличилось на 5. На сколько увеличилось количество зелёных хамелеонов?

Ответ: 11.

Решение. Пусть A — количество зелёных хамелеонов на острове, а B — жёлтых. Рассмотрим величину $A - B$. Заметим, что каждый пасмурный день она уменьшается на 1, а каждый солнечный день она увеличивается на 1. Поскольку солнечных дней в сентябре было на $18 - 12 = 6$ больше, чем пасмурных, то и величина $A - B$ увеличилась на 6 за это время. Поскольку B увеличилось на 5, то A должно было увеличиться на $5 + 6 = 11$. \square

Задача 9.2. У Дениса есть карточки с числами от 1 до 50. Сколько существует способов выбрать две карточки так, чтобы разность чисел на карточках равнялась 11, а произведение делилось на 5?

Порядок выбранных карточек не важен: например, способ выбора карточек с числами 5 и 16, а также способ выбора карточек с числами 16 и 5 — это один и тот же способ.

Ответ: 15.

Решение. Чтобы произведение делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы какой-то множитель делился на 5. Пусть n — делящееся на 5 выбранное число, тогда в пару ему надо выбрать $n - 11$ или $n + 11$, притом оба выбранных числа должны быть натуральными. Ясно, что при $n = 5, 10, 40, 45, 50$ есть только один способ выбрать пару, а при $n = 15, 20, 25, 30, 35$ есть ровно два способа выбрать пару. Итого $5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 15$ способов. \square

Задача 9.3. Торговцы Андрей и Борис купили по 60 мешков картошки у одного и того же фермера. Все мешки стоили одинаково.

Андрей продал все свои мешки, увеличив их цену на 100%. Борис же сначала увеличил цену на 60%, а когда продал 15 мешков, увеличил цену ещё на 40% и продал остальные 45 мешков.

Оказалось, что Борис заработал на 1200 рублей больше Андрея. Сколько рублей стоил один мешок картошки у фермера?

Ответ: 250.

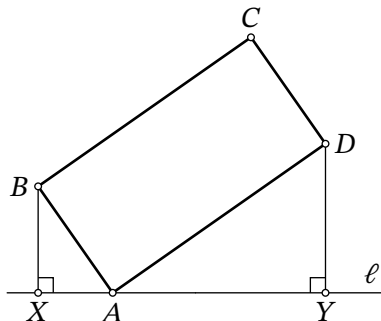
Решение. Пусть мешок у фермера стоил x рублей. На покупку 60 мешков Андрей и Борис потратили поровну.

Из условия следует, что Андрей продал 60 мешков по $2x$ рублей, т. е. получил $60 \cdot 2x$ рублей. Борис же продал 15 мешков по цене $1,6x$ рублей, а затем продал 45 мешков по цене $1,6x \cdot 1,4$ рублей. Получаем уравнение

$$2x \cdot 60 + 1200 = 15 \cdot 1,6x + 45 \cdot 1,6x \cdot 1,4.$$

Решая его, находим $x = 250$. \square

Задача 9.4. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая ℓ , как изображено на рисунке. Из точек B и D опущены перпендикуляры BX и DY на прямую ℓ . Найдите длину отрезка XY , если известно, что $BX = 4$, $DY = 10$, $BC = 2AB$.



Ответ: 13.

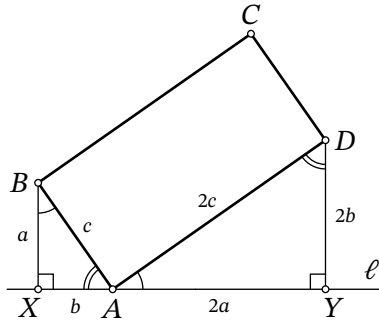


Рис. 5: к решению задачи 9.4

Решение. Заметим, что так как $\angle YAD = 90^\circ - \angle XAB$ (рис. 5), то прямоугольные треугольники XAB и YDA подобны по острому углу $\angle YAD = \angle XBA$. Коэффициент подобия равен отношению $AB : AD$, то есть $\frac{1}{2}$. Отсюда получаем $XA = \frac{1}{2}DY = 5$ и $AY = 2BX = 8$, что в сумме даёт $XY = 13$. \square

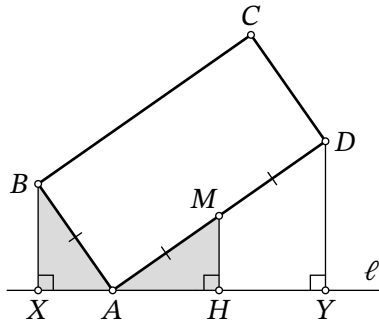


Рис. 6: к решению задачи 9.4

Другое решение. Пусть M — середина отрезка AD , тогда $AM = MD = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} = AB$ (рис. 6). Опустим из M перпендикуляр на MH на прямую l . Поскольку в треугольнике ADY отрезок MH проходит через середину стороны AD и параллелен стороне DY , то он является средней линией, $AH = HY$ и $MH = \frac{DY}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

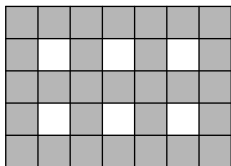
Заметим, что $\angle ABX = 90^\circ - \angle BAX = 90^\circ - (180 - 90^\circ - \angle MAH) = \angle MAH$. Тогда прямоугольные треугольники ABX и MAH равны по гипотенузе $AB = AM$ и острому углу $\angle ABX = \angle MAH$. Отсюда следует, что $AX = MH = 5$ и $AH = BX = 4$.

Итак, $XY = AX + AH + HY = 5 + 4 + 4 = 13$. \square

Задача 9.5. У Леонида есть белый клетчатый прямоугольник. Сначала он покрасил в серый цвет все столбцы через один, начиная с самого левого, а затем все строки через одну, начиная с самой верхней. Все клетки, примыкающие к границе прямоугольника, оказались закрашены.

Сколько закрашенных клеток могло получиться в прямоугольнике, если белых клеток осталось 74? Укажите все возможные варианты.

Пример раскраски прямоугольника 5×7 изображён ниже.



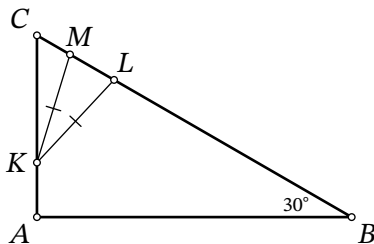
Ответ: 301 или 373.

Решение. Из условия следует, что в прямоугольнике нечётное количество и столбцов, и строк. Пронумеруем строки сверху вниз числами $1, 2, \dots, 2k + 1$, а столбцы слева направо числами $1, 2, \dots, 2l + 1$ (для целых неотрицательных k и l). Не нарушая общности, $k \leq l$.

Заметим, что все белые клетки находятся в точности в тех клетках, номера столбца и строки которых — чётные числа. Отсюда следует равенство $74 = k \cdot l$. Тогда либо $k = 1$ и $l = 74$, либо $k = 2$ и $l = 37$. Ясно, что всего закрашенных клеток $(2k + 1)(2l + 1) - kl$, поэтому в первом случае получаем ответ $3 \cdot 149 - 1 \cdot 74 = 373$, а во втором — ответ $5 \cdot 75 - 2 \cdot 37 = 301$. \square

Задача 9.6. В треугольнике ABC известны углы $\angle B = 30^\circ$ и $\angle A = 90^\circ$. На стороне AC отмечена точка K , а на стороне BC — точки L и M так, что $KL = KM$ (точка L лежит на отрезке BM).

Найдите длину отрезка LM , если известно, что $AK = 4$, $BL = 31$, $MC = 3$.



Ответ: 14.

Решение. В решении мы будем несколько раз пользоваться фактом о том, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет напротив этого угла вдвое меньше гипотенузы.

Опустим в равнобедренном треугольнике KML высоту KH на основание (рис. 7). Поскольку эта высота является и медианой, то $MH = HL = x$. В прямоугольном треуголь-

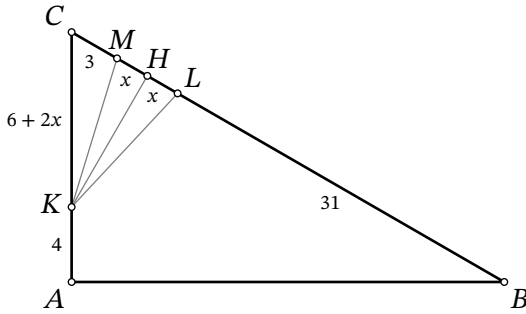


Рис. 7: к решению задачи 9.6

нике CKH имеем $\angle CKN = 90^\circ - \angle C = \angle A = 30^\circ$, поэтому $KC = 2 \cdot CH = 2 \cdot (CM + MH) = 2 \cdot (3 + x) = 6 + 2x$. В прямоугольном треугольнике ABC имеем $\angle A = 30^\circ$, поэтому $BC = 2 \cdot AC$. Составляя и решая соответствующее уравнение $31 + 2x + 3 = 2 \cdot (4 + 6 + 2x)$, находим $x = 7$. Тогда $LM = 2x = 2 \cdot 7 = 14$. \square

Задача 9.7. В школьном шахматном турнире участвовали 4 человека: Андрей, Ваня, Дима и Саша. Каждый сыграл дважды с каждым своим соперником. В каждой игре за победу давалось 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков.

Известно, что по окончании турнира

- все ребята набрали разное количество очков;
- Андрей занял первое место, Дима — второе, Ваня — третье, Саша — четвёртое;
- Андрей одержал столько же побед, сколько и Саша.

Сколько очков набрал каждый из ребят?

Ответ: Андрей набрал 4 очка, Ваня — 2,5, Дима — 3,5, Саша — 2.

Решение. В каждой игре два участника суммарно получают 1 очко. Ясно, что всего игр было $6 \cdot 2 = 12$, поэтому суммарно у всех участников ровно 12 очков. Также ясно, что итоговое количество очков у каждого участника — либо целое число, либо целое, увеличенное на 0,5.

Если бы Саша набрал хотя бы 2,5 очка, то Ваня — хотя бы 3 очка, Дима — хотя бы 3,5 очка, Андрей — хотя бы 4 очка. Тогда суммарно они бы набрали хотя бы $2,5 + 3 + 3,5 + 4 = 13$ очков, противоречие. Значит, Саша набрал не более 2 очков. Следовательно, он одержал не более 2 побед, тогда и Андрей одержал не более 2 побед.

Всего Андрей сыграл 6 игр, тогда он набрал не более $2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 = 4$ очков. Если бы Андрей набрал не более 3,5 очков, то Дима — не более 3, Ваня — не более 2,5, Саша — не более 2. Тогда суммарно они набрали не более $3,5 + 3 + 2,5 + 2 = 11$ очков, противоречие. Значит, Андрей набрал ровно 4 очка, причём это возможно только в случае, если он 2 раза

победил и 4 раза сыграл вничью. Тогда и Саша 2 раза победил, при этом у него не более 2 очков. Значит, Саша набрал ровно 2 очка.

Дима и Ваня суммарно набрали оставшиеся ровно $12 - 4 - 2 = 6$ очков, причём Ваня набрал хотя бы 2,5 очка, а Дима — не более 3,5. Поскольку они набрали разное количество очков, и Ваня набрал меньше Димы, то Ваня набрал ровно 2,5 очка, а Дима — ровно 3,5 очка.

Приведём пример, как могла произойти описанная турнирная ситуация. Пусть Андрей дважды выиграл у Саши, дважды сыграл вничью и с Ваней, и с Димой. Саша же дважды выиграл у Вани и дважды проиграл Диме. Наконец, Дима один раз проиграл Ване, а другой раз сыграл с ним вничью. Несложно видеть, что все условия задачи выполняются. \square

Задача 9.8. Целые числа n и m удовлетворяют неравенствам $3n - m < 5$, $n + m > 26$, $3m - 2n < 46$. Чему может равняться $2n + m$? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 36.

Решение. Поскольку числа m и n целые, то и значения выражений из условия $3n - m$, $n + m$, $3m - 2n$ — тоже целые. Тогда

$$\begin{cases} 3n - m \leq 4, \\ n + m \geq 27, \\ 3m - 2n \leq 45. \end{cases}$$

Сложив утроенное первое неравенство с третьим, получим $7n \leq 57$, откуда $n \leq 8$. Сложив удвоенное первое неравенство с утроенным третьим, получим $7m \leq 143$, откуда $m \leq 20$.

Итак, $n \leq 8$, $m \leq 20$, при этом $n + m \geq 27$. Это возможно только в трёх случаях.

- Пусть $n = 7$, $m = 20$. Тогда не выполняется условие $3m - 2n \leq 45$.
- Пусть $n = 8$, $m = 19$. Тогда не выполняется условие $3n - m \leq 4$.
- Пусть $n = 8$, $m = 20$. Несложно видеть, что тогда все условия выполняются. Значит, $2n + m = 2 \cdot 8 + 20 = 36$. \square

Другое решение. Изобразим данные неравенства как области на координатной плоскости Omn , как на рис. 8. Каждое из неравенств соответствует некоторой полуплоскости. Например, неравенство $3n - m < 5$ — это полуплоскость, расположенная ниже прямой $3n - m = 5$.

Пересечением этих полуплоскостей является треугольник, внутри которого лежит одна целая точка $m = 20$, $n = 8$ (точки на границе треугольника не подходят, так как неравенства строгие), откуда сразу получаем единственный ответ $2n + m = 36$. \square

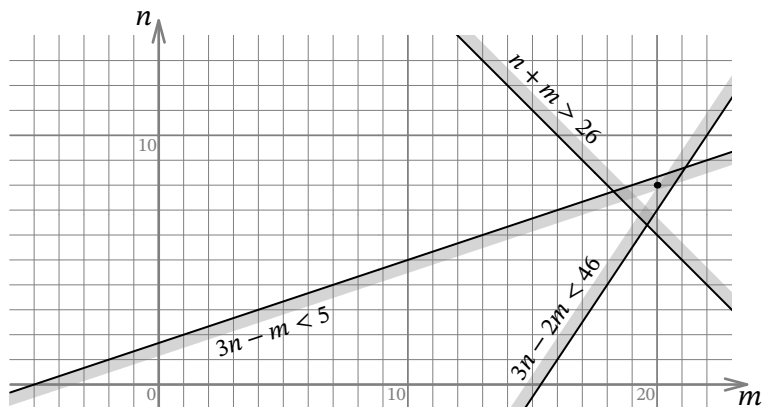


Рис. 8: к решению задачи 9.8

10 класс

Задача 10.1. Найдите наибольшее 12-значное число N , удовлетворяющее двум следующим условиям:

- В десятичной записи числа N шесть цифр «4» и шесть цифр «7»;
- В десятичной записи числа N никакие четыре подряд идущие цифры не образуют число «7444».

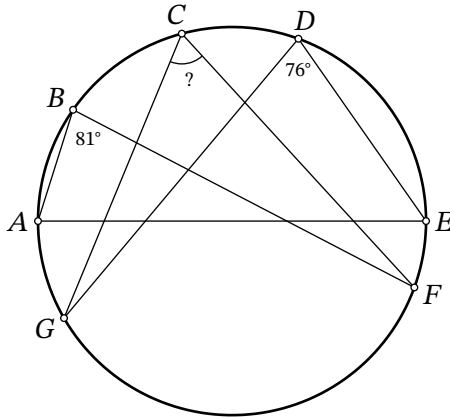
Ответ: 777744744744.

Решение. Ясно, что число 777744744744 подходит под условие задачи.

Предположим, существует число больше, тогда оно точно начинается с четырёх семёрок. Выберем в этом числе наибольшее количество подряд идущих четвёрок, пусть их k . Если $k \geq 3$, то выбрав среди этих k четвёрок три самых левых, а также семёрку левее их, получим кусок цифр «7444», противоречие.

Значит, $k \leq 2$. В последних восьми разрядах числа должны стоять шесть четвёрок. Поскольку никакие три подряд идущие цифры не могут быть одновременно четвёрками, то последние восемь цифр определяются однозначно: это 44744744. Но соответствующее число 777744744744 мы уже нашли. \square

Задача 10.2. На окружности по часовой стрелке расположены точки A, B, C, D, E, F, G , как изображено на рисунке. Известно, что AE — диаметр окружности. Также известно, что $\angle ABF = 81^\circ$, $\angle EDG = 76^\circ$. Сколько градусов составляет угол FCG ?



Ответ: 67.

Решение. Поскольку вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, то $\angle ACF = \angle ABF = 81^\circ$ и $\angle ECG = \angle EDG = 76^\circ$. Поскольку на диаметр опирается прямой угол,

$$\angle FCG = \angle ACF + \angle ECG - \angle ACE = 81^\circ + 76^\circ - 90^\circ = 67^\circ. \quad \square$$

Задача 10.3. Лёша разрезал куб $n \times n \times n$ на 153 меньших кубика. Причём у всех кубиков, кроме одного, длина ребра равна 1. Найдите n .

Ответ: 6.

Решение. Пусть оставшийся кубик имеет ребро s . Очевидно, что числа n и s — натуральные, причём $n > s$.

Разность объёмов кубов с рёбрами n и s равна суммарному объёму кубиков с ребром 1. Следовательно, $n^3 - s^3 = 152$.

Поскольку $n^3 > 152 > 5^3$, то $n > 5$. Заметим, что $n = 6$ равенству выше удовлетворяет, ему соответствует $s = 4$, ведь $6^3 - 4^3 = 152$. А $n = 7$ равенству не удовлетворяет, ведь число $7^3 - 152 = 191$ не является точным кубом. Также не удовлетворяют равенству и все $n \geq 8$, ведь иначе

$$152 = n^3 - s^3 \geq n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1 = 3n(n-1) + 1 \geq 3 \cdot 8 \cdot 7 + 1 > 152.$$

Ясно, что единственное значение $n = 6$ возможно: куб $6 \times 6 \times 6$ можно разрезать на куб $4 \times 4 \times 4$ и 152 кубика $1 \times 1 \times 1$. \square

Задача 10.4. В классе учатся N школьников: несколько отличников и 8 хулиганов. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут.

Однажды все ученики этого класса сели за круглый стол, и каждый из них заявил всем остальным: «Как минимум треть из вас — хулиганы!»

Чему может быть равно N ? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 23, 24 или 25.

Решение.

Условие того, что хулиган сделал данное заявление, равносильно неравенству $\frac{7}{N-1} < \frac{1}{3}$, что эквивалентно $N > 22$.

Условие того, что отличник сделал данное заявление, равносильно неравенству $\frac{8}{N-1} \geq \frac{1}{3}$, что эквивалентно $25 \geq N$.

Поскольку в классе есть хулиганы, то $N > 22$. Тогда в классе есть и отличники, значит, $25 \geq N$. Следовательно, все возможные натуральные значения N — это 23, 24, 25. \square

Задача 10.5. У Вики есть 60 карточек с числами от 1 до 60. Она хочет разбить все карточки на пары так, чтобы во всех парах получался один и тот же модуль разности чисел. Сколько существует способов так сделать?

Ответ: 8.

Решение. Пусть d — модуль разности чисел. Очевидно, что число d — натуральное.

Ясно, что число 1 должно быть в паре с $d + 1$, число 2 должно быть в паре с $d + 2$, ..., число d должно быть в паре с $2d$. Значит, первые $2d$ натуральных чисел разбились друг с другом на пары.

Рассматривая число $2d + 1$, получаем, что оно должно быть в паре с $3d + 1$, число $2d + 2$ должно быть в паре с $3d + 2$, ..., число $3d$ должно быть в паре с $4d$. Значит, следующие $2d$ натуральных чисел тоже разбились друг с другом на пары.

Продолжая так аналогично, получаем, что множество всех чисел $\{1, 2, \dots, 60\}$ должно разбиться на непересекающиеся группы по $2d$ чисел (которые при этом разбиваются на d пар). Следовательно, 60 делится на $2d$, что равносильно тому, что 30 делится на d . У числа 30 ровно 8 натуральных делителей: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Ясно, что все они подходят, ведь каждому числу d среди них соответствует $\frac{30}{d}$ групп вида $\{2kd + 1, 2kd + 2, \dots, 4kd\}$, которые очевидным образом разбиваются на пары с модулем разности d . \square

Задача 10.6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота $АН$. Окружность, проходящая через точки A и H , пересекает катеты AB и AC в точках X и Y соответственно. Найдите длину отрезка AC , если известно, что $AX = 5$, $AY = 6$, $AB = 9$.

Ответ: 13,5.

Решение. Пусть K — вторая точка пересечения данной окружности со стороной BC (рис. 9). Поскольку $\angle ANK = 90^\circ$, отрезок AK является диаметром этой окружности, и $\angle AXK = \angle AYK = 90^\circ$. Следовательно, $AXKY$ — прямоугольник, и $XK = AY = 6$.

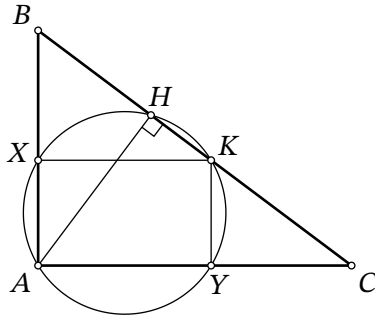


Рис. 9: к решению задачи 10.6

Из условия следует, что $XB = AB - AX = 9 - 5 = 4$. Заметим, что прямоугольные треугольники XBK и ABC с общим острым углом B подобны. Поэтому

$$\frac{4}{6} = \frac{XB}{XK} = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{AC},$$

откуда находим $AC = 13,5$. □

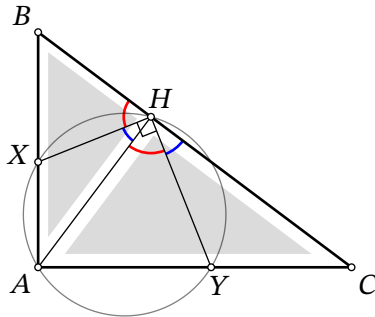


Рис. 10: к решению задачи 10.6

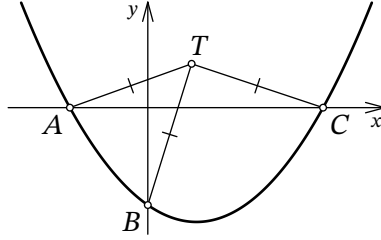
Другое решение. Из вписанности четырёхугольника $AXHY$ следует, что $\angle XHY = 180^\circ - \angle XAY = 90^\circ$. Заметим, что $\angle CHY = 180^\circ - \angle XHY - \angle BHX = 90^\circ - \angle BHX = \angle ANX$ (рис. 10). Это означает, что в подобных прямоугольных треугольниках ANC и BNA точки Y и X соответствуют друг другу, то есть делят соответствующие стороны AC и AB в одинаковых отношениях (также это можно вывести из подобия по углам треугольников CHY и ANX). Следовательно,

$$\frac{6}{CY} = \frac{AY}{CY} = \frac{BX}{AX} = \frac{4}{5},$$

откуда находим $CY = 6 \cdot \frac{5}{4} = 7,5$ и $AC = AY + CY = 6 + 7,5 = 13,5$. □

Задача 10.7. График функции $f(x) = \frac{1}{12}x^2 + ax + b$ пересекает ось Ox в точках A и C , а ось

Оу — в точке B , как изображено на рисунке. Оказалось, что для точки T с координатами $(3; 3)$ выполнено условие $TA = TB = TC$. Найдите b .



Ответ: -6 .

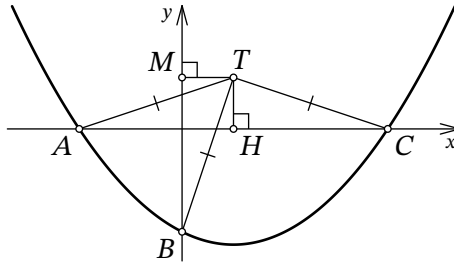


Рис. 11: к решению задачи 10.7

Решение. Пусть точка A имеет координаты $(x_1; 0)$, точка C — координаты $(x_2; 0)$. Из условия ясно, что $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. Поскольку x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $f(x)$, то по теореме Виета имеем $x_1 \cdot x_2 = 12b$, откуда получаем $b = \frac{x_1 \cdot x_2}{12} < 0$.

Пусть H — точка с координатами $(3; 0)$ (рис. 11). Ясно, что в равнобедренном треугольнике ATC отрезок TH является высотой, поэтому он также является и медианой. Следовательно, $3 - x_1 = AH = HC = x_2 - 3$, откуда получаем $x_1 = 6 - x_2$.

Пусть M — точка с координатами $(0, 3)$. Поскольку $TH = TM = 3$ и $TA = TB$, прямоугольные треугольники ATH и BTM равны по катету и гипотенузе. Следовательно, $3 - x_1 = HA = MB = 3 - b$, то есть $x_1 = b = \frac{x_1 \cdot x_2}{12}$ (по т. Виета), откуда находим $x_2 = 12$. Наконец, $x_1 = 6 - x_2 = 6 - 12 = -6$ и $b = x_1 = -6$. \square

Другое решение. Как и в предыдущем решении, обозначим абсциссы точек A и C за x_1 и x_2 соответственно; также будем пользоваться тем, что точка B имеет координаты $(0; b)$. Сразу поймём, что $OA = |x_1| = -x_1$, $OC = |x_2| = x_2$ и $OB = |b| = -b$.

Найдём второе пересечение окружности с осью ординат, пусть это точка D с координатами $(0; d)$ (рис. 12). Хорды AC и BD окружности пересекаются в начале координат O ; из свойств окружности мы знаем, что $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Получаем $-x_1 \cdot x_2 = -b \cdot d$, откуда, заменяя $x_1 \cdot x_2$ на $12b$ по теореме Виета, получаем $d = 12$.

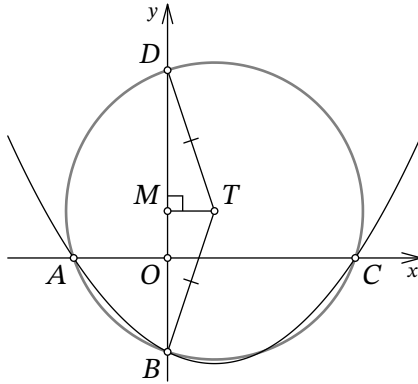


Рис. 12: к решению задачи 10.7

Осталось заметить, что треугольник BTD равнобедренный, и середина его основания, точка M , имеет координаты $(0; 3)$. Отражая относительно неё точку $D(0; 12)$, получаем $B(0; -6)$. \square

Задача 10.8. При каком наименьшем натуральном a на числовом интервале $(a, 3a)$ находится ровно 50 точных квадратов?

Ответ: 4486.

Решение. Выберем наибольшее натуральное n такое, что $n^2 \leq a$. Тогда

$$n^2 \leq a < (n+1)^2 < (n+2)^2 < \dots < (n+50)^2 < 3a \leq (n+51)^2.$$

Заметим, что $\frac{(n+50)^2}{(n+1)^2} < \frac{3a}{a} = 3$, поэтому $1 + \frac{49}{n+1} = \frac{n+50}{n+1} < \sqrt{3}$, откуда получаем

$$n+1 > \frac{49}{\sqrt{3}-1} = \frac{49(\sqrt{3}+1)}{2} > \frac{49(1,7+1)}{2} > \frac{132}{2} = 66.$$

Из того, что $n+1 > 66$, следует, что $n \geq 66$ и $a \geq 66^2$.

Если на соответствующем значении $n = 66$ числовом промежутке $[66^2; 67^2)$ найдутся подходящие значения a , то наименьшее из них и будет ответом в задаче. В этом случае должны выполняться условия $66^2 = 4356 \leq a < 4489 = 67^2$. Также должны выполняться условия $13456 = 116^2 < 3a \leq 117^2 = 13689$, равносильные тому, что $4485\frac{1}{3} < a \leq 4563$. Ясно, что наименьшим a , подходящим под все эти условия, является $a = 4486$. Оно подходит: на соответствующем промежутке $(a; 3a)$ находятся только точные квадраты $67^2, 68^2, \dots, 116^2$, и их ровно 50. \square

11 класс

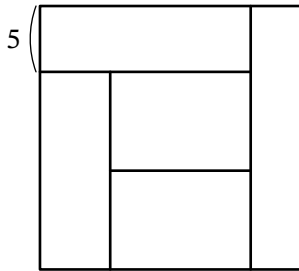
Задача 11.1. Произведение девяти последовательных натуральных чисел делится на 1111. Какое наименьшее возможное значение может принимать среднее арифметическое этих девяти чисел?

Ответ: 97.

Решение. Пусть эти девять чисел — $n, n + 1, \dots, n + 8$ для некоторого натурального n . Ясно, что их среднее арифметическое равно $n + 4$.

Чтобы произведение делилось на $1111 = 11 \cdot 101$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из множителей делился на 11, а также хотя бы один из множителей делился на 101. Тогда какое-то из девяти чисел не меньше 101, поэтому $n + 8 \geq 101$ и $n + 4 \geq 97$. Ясно также, что для девяти чисел 93, 94, ..., 101 значение $n + 4 = 97$ достигается, ведь 99 делится на 11, а 101 делится на 101. \square

Задача 11.2. Квадрат разрезали на пять прямоугольников равной площади, как изображено на рисунке. Ширина одного из прямоугольников равна 5. Найдите площадь квадрата.



Ответ: 400.

Решение. У центрального прямоугольника и у прямоугольника под ним есть общая горизонтальная сторона, а площади их равны. Значит, вертикальные стороны этих прямоугольников равны, обозначим их через x (рис. 13). У левого нижнего прямоугольника вертикальная сторона равна $2x$, его горизонтальную сторону обозначим через y . Поскольку его площадь $2xy$ совпадает с площадью центрального прямоугольника, то горизонтальная сторона центрального прямоугольника равна $2y$. Тогда горизонтальная сторона левого верхнего прямоугольника равна $3y$, и его площадь $3y \cdot 5 = 15y$ должна быть равна $2xy$, откуда находим $x = 7,5$. Тогда у всего квадрата сторона равна $5 + 2x = 5 + 2 \cdot 7,5 = 20$, а его площадь равна $20^2 = 400$. \square

Задача 11.3. В турнире по футболу участвовало 15 команд, каждая сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью — 1 очко, а за поражение — 0 очков.

После завершения турнира оказалось, что некоторые 6 команд набрали хотя бы N очков каждая. Какое наибольшее целое значение может принимать N ?

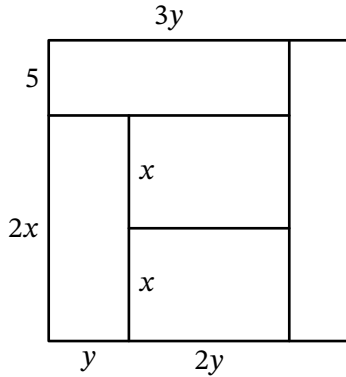


Рис. 13: к решению задачи 11.2

Ответ: 34.

Решение. Назовём эти 6 команд *успешными*, а остальные 9 команд назовём *неуспешными*. Назовём игру двух успешных команд *внутренней*, а игру успешной и неуспешной команды — *внешней*.

Сразу заметим, что за каждую игру участвующие в ней команды суммарно получают не более 3 очков. Ясно, что внутренних игр было ровно $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, и только за такие игры все успешные команды суммарно заработали не более $15 \cdot 3 = 45$ очков. Внешних же игр было ровно $6 \cdot 9 = 54$, и в каждой такой игре успешная команда зарабатывала не более 3 очков. Итого за внешние игры все успешные команды суммарно набрали не более $54 \cdot 3 = 162$ очка. По условию успешные команды суммарно набрали хотя бы $6N$ очков, поэтому получаем неравенство $6N \leq 45 + 162$. Из него следует, что $N \leq \frac{207}{6} < 35$ и $N \leq 34$.

Теперь приведём пример для $N = 34$. Пронумеруем команды числами от 1 до 15. Покажем, как команды от 1 до 6 могут набрать хотя бы 34 очка.

- Пусть каждая команда от 1 до 6 выиграла у каждой команды от 7 до 15, тогда только за такие игры каждая команда от 1 до 6 набрала $9 \cdot 3 = 27$ очков.
- Пусть команды от 1 до 6 играли между собой так, как указано в следующей таблице (в каждой клетке указано количество очков, которое команда из соответствующей строки получила в игре с командой из соответствующего столбца):

	1	2	3	4	5	6
1		3	3	1	0	0
2	0		3	3	1	0
3	0	0		3	3	1
4	1	0	0		3	3
5	3	1	0	0		3
6	3	3	1	0	0	

- Пусть в каждой игре команд от 7 до 15 выиграла команда с большим номером (исход этих игр не имеет значения).

Итого команды от 1 до 6 набрали хотя бы $27 + 7 = 34$ очка. □

Задача 11.4. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. На стороне AE отмечена точка K , на стороне CD — точка L . Известно, что $\angle LAE + \angle KCD = 108^\circ$, $AK : KE = 3 : 7$. Найдите $CL : AB$.

Правильный пятиугольник — пятиугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

Ответ: 0,7.

Решение. Для начала сформулируем известные факты, которыми мы будем пользоваться в решении.

- Сумма углов n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$. В частности, каждый угол правильного пятиугольника равен $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$.
- Все пять диагоналей правильного пятиугольника равны. Также каждая диагональ отсекает от пятиугольника равнобедренный треугольник с углом 108° при вершине и углами 36° при основании.

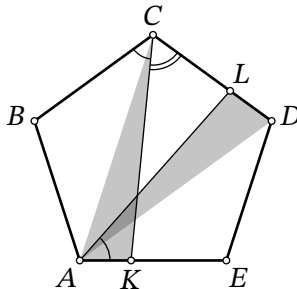


Рис. 14: к решению задачи 11.4

Пусть $\angle LAE = \alpha$, тогда $\angle KCD = 108^\circ - \alpha$ и $\angle BCK = \alpha$ (рис. 14). Заметим, что

$$\begin{aligned} \angle CKA &= 360^\circ - \angle KAB - \angle ABC - \angle BCK = 360^\circ - 108^\circ - 108^\circ - \alpha = \\ &= 360^\circ - \angle LDE - \angle DEA - \angle EAL = \angle ALD. \end{aligned}$$

Докажем, что треугольники ALD и CKA равны. Равенство одной пары углов у нас уже есть. Далее, $\angle ADL = \angle CDE - \angle ADE = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$; так же получается $\angle CAK = 72^\circ$, так как это аналогичный угол между диагональю и стороной пятиугольника.

Тогда равны и третьи углы треугольников. Значит, треугольники ALD и CKA равны по стороне $AD = AC$ и прилежащим к ней углам; отсюда следует $LD = AK$.

Обозначив длину AK за $3x$, имеем $KE = 7x$ из условия и $AE = AK + KE = 10x$. Кроме того, $CD = AB = AE$, так как это стороны пятиугольника. Получаем, что $CL = CD - LD = 7x$. Наконец, $CL : AB = 7x : 10x = 0,7$. \square

Замечание. Равенство треугольников можно установить, рассмотрев поворот на 144° вокруг центра пятиугольника, который переводит точку C в точку A . Из равенства углов, данного в условии, следует, что угол BCK перейдёт в EAL и отрезок CK в отрезок AL ; тогда совместятся и треугольники.

Задача 11.5. На доске написано некоторое двузначное число. Незнайка заявил, что оно делится на 3, 4, 5, 9, 10, 15, 18, 30. Знайка, услышав это, огорчил Незнайку тем, что тот ошибся ровно 4 раза. Какое число могло быть написано на доске? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 36, 45 или 72.

Решение. Пусть N — написанное на доске двузначное число. Если бы N делилось на 30, то оно также бы делилось на 3, 5, 10, 15, поэтому Незнайка ошибся бы не более 3 раз, противоречие. Если бы N не делилось на 3, то оно также бы не делилось на 9, 15, 18, 30, поэтому Незнайка ошибся бы хотя бы 5 раз, противоречие. Следовательно, N делится на 3, но не делится на 30. Отсюда сразу следует, что N не делится на 10. Значит, среди утверждений про делимость на 4, 5, 9, 15, 18 верны ровно три. Число N , делящееся на 3, не может одновременно делиться на 4 и 5 (иначе оно делилось бы и на 30). Следовательно, среди утверждений про делимость на 9, 15, 18 верны хотя бы два. Если бы N не делилось на 9, то оно также бы не делилось и на 18, противоречие. Следовательно, N делится на 9. Кроме того, N делится на 15 или на 18. Рассмотрим два случая.

- Пусть N делится на 15. Поскольку оно также делится и на 9, то оно равно либо 45, либо 90. Но N не может быть равно 90, поскольку N не делится на 30. При этом N может быть равно 45 (ведь 45 делится на 3, 5, 9, 15 и не делится на 4, 10, 18, 30).
- Пусть N не делится на 15. Тогда оно делится на 18, и оно равно либо 18, либо 36, либо 54, либо 72, либо 90. Опять же, N не может быть равно 90, поскольку N не делится на 30. Также N не может быть равно 18 и 54 (ведь 18 и 54 оба делятся на 3, 9, 18 и оба не делятся на 4, 5, 10, 15, 30). При этом N может быть равно 36 или 72 (ведь 36 и 72 оба делятся на 3, 4, 9, 18 и оба не делятся на 5, 10, 15, 30).

Итого получилось три возможных варианта: 36, 45 и 72. \square

Задача 11.6. Квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что $P(P(x)) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 4$. Чему может равняться $P(8)$? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 58.

Решение. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $P(P(x)) = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c =$

$a(a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2) + b(ax^2 + bx + c) + c$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 4 &= P(P(x)) = \\ &= a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (ab^2 + 2a^2c + ab)x^2 + (2abc + b^2)x + (ac^2 + bc + c). \end{aligned}$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a^3 = 1, \\ 2a^2b = -2, \\ ab^2 + 2a^2c + ab = 4, \\ 2abc + b^2 = -3, \\ ac^2 + bc + c = 4. \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу следует, что $a = 1$. Подставив $a = 1$ во второе уравнение, получим $2b = -2$, откуда $b = -1$. Подставив $a = 1$ и $b = -1$ в третье уравнение, получим $1 + 2c - 1 = 4$, откуда $c = 2$. Ясно, что $a = 1, b = -1, c = 2$ является решением этой системы, поэтому $P(x) = x^2 - x + 2$ и $P(8) = 8^2 - 8 + 2 = 58$. \square

Задача 11.7. В стране 110 городов. Между каждыми двумя из них либо есть дорога, либо её нет.

Автомобилист находился в некотором городе, из которого вела ровно одна дорога. Проехав по дороге, он оказался во втором городе, из которого вели уже ровно две дороги. Проехав по одной из них, он оказался в третьем городе, из которого вели уже ровно три дороги, и так далее. В какой-то момент, проехав по одной из дорог, он оказался в N -м городе, из которого вели уже ровно N дорог. На этом автомобилист своё путешествие прекратил. (Для каждого $2 \leq k \leq N$ из k -го города выходило ровно k дорог с учётом той, по которой автомобилист в этот город приехал.)

Какое наибольшее значение может принимать N ?

Ответ: 107.

Решение. Пронумеруем города в порядке их посещения автомобилистом: 1, 2, 3, ..., N .

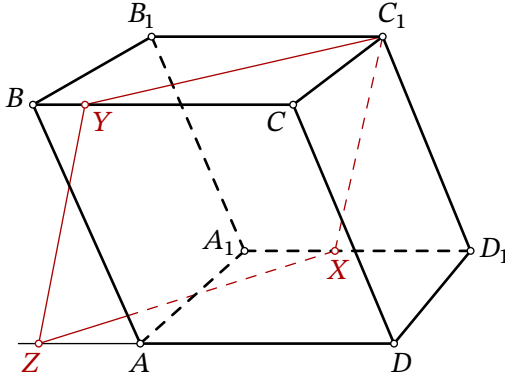
Предположим, $N \geq 108$. Из города 1 ведёт дорога только в город 2, поэтому из города 108 все дороги ведут во все 108 городов, кроме 1 и 108. Но тогда из города 2 ведёт хотя бы три дороги: в города 1, 3 и 108. Противоречие, значит, $N \leq 107$.

Приведём пример для $N = 107$. Пусть города имеют номера 1, 2, 3, ..., 109, 110. Пусть

- для всех $1 \leq i \leq 54$ есть дорога из города i в город $i + 1$;
- для всех $56 \leq j \leq 107$ есть дороги из города j во все города с $110 - j$ по 110 включительно, кроме самого города j ;
- из города 55 есть дороги в города 109 и 110;
- никаких других дорог в стране нет.

Несложно убедиться, что для всех $1 \leq k \leq 107$ из города k ведёт ровно k дорог. По этим городам и мог проехать автомобилист. \square

Задача 11.8. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На ребре $A_1 D_1$ выбрана точка X , а на ребре BC выбрана точка Y . Известно, что $A_1 X = 5$, $BY = 3$, $B_1 C_1 = 14$. Плоскость $C_1 X Y$ пересекает луч DA в точке Z . Найдите DZ .



Ответ: 20.

Решение. Прямые $C_1 Y$ и $Z X$ лежат в параллельных плоскостях $B B_1 C_1 C$ и $A A_1 D_1 D$, поэтому не пересекаются. Поскольку эти две прямые также лежат в одной плоскости $C_1 X Z Y$, то они параллельны. Аналогично, параллельны прямые $Y Z$ и $C_1 X$. Следовательно, четырёхугольник $C_1 X Z Y$ — параллелограмм.

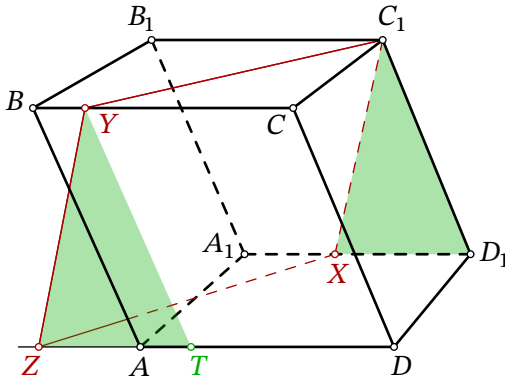


Рис. 15: к решению задачи 11.8

Отложим на AD отрезок AT , равный BY (рис. 15). Четырёхугольник $BYTA$ — параллелограмм, то есть отрезки YT , BA и $C_1 D_1$ параллельны и равны. Кроме этого, параллельны и равны отрезки YZ и $C_1 X$; из параллельностей следует равенство углов ZYT и $XC_1 D_1$, что даёт равенство треугольников ZYT и $XC_1 D_1$.

Тогда

$$\begin{aligned}DZ &= ZT + AD - AT = XD_1 + B_1C_1 - BY = \\ &= (A_1D_1 - A_1X) + B_1C_1 - BY = (14 - 5) + 14 - 3 = 20. \quad \square\end{aligned}$$

Другое решение. Как и в предыдущем решении, будем пользоваться тем, что C_1XZY — параллелограмм.

Рассмотрим цепочку векторных равенств:

$$\overrightarrow{DZ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{C_1Y} + \overrightarrow{C_1X} = \overrightarrow{C_1Y} + \overrightarrow{D_1X}.$$

В последней части все векторы ориентированы так же, как \overrightarrow{DZ} , поэтому можно перейти к равенству отрезков и продолжить:

$$DZ = CY + D_1X = (CB - BY) + (D_1A_1 - A_1X) = 2B_1C_1 - BY - A_1X.$$

Подставляя данные в условия длины, получаем $DZ = 2 \cdot 14 - 3 - 5 = 20$. □