Условия и решения задач

9 класс

9.1. Даны два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$; известно, что трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ имеют по два корня. Оказалось, что разность корней трёхчлена $f(x)$ равна разности корней трёхчлена $g(x)$. Докажите, что разность корней трёхчлена $f(x)+g(x)$ не больше этих разностей. (В каждой разности из большего корня вычитается меньший.) (*И. Богданов*)

Первое решение. Заметим, что разность корней приведённого квадратного трёхчлена x^2+bx+c равна корню из его дискриминанта, то есть $\sqrt{b^2-4c}$.

Пусть два данных трёхчлена — это $f(x)=x^2+b_1x+c_1$ и $g(x)=x^2+b_2x+c_2$. Согласно условию, у них общий дискриминант $D=b_1^2-4c_1=b_2^2-4c_2$. Вместо суммы трёхчленов удобно рассмотреть их полусумму — она тоже является приведённым квадратным трёхчленом. Квадрат разности его корней (т.е. дискриминант) равен

$$\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)^2-2(c_1+c_2)=\frac{b_1^2+b_2^2}{2}-2(c_1+c_2)-\left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2.$$

Значит, он не больше, чем $\dfrac{b_1^2+b_2^2}{2}-2(c_1+c_2)=\dfrac{D}{2}+\dfrac{D}{2}=D$. Отсюда и следует, что разность корней полусуммы не больше, чем $\sqrt{D}$, то есть разность корней каждого из данных трёхчленов.

Замечание. В оценке выше можно было воспользоваться неравенством о средних $\sqrt{\dfrac{b_1^2+b_2^2}{2}}\geqslant\dfrac{b_1+b_2}{2}$.

Второе решение. Заметим, что любой приведённый квадратный трёхчлен с двумя корнями имеет вид $(x-p)^2-q^2$ при $q\geqslant 0$. При этом разность его корней равна $2q$, а его наименьшее значение равно $-q^2$.

Теперь условие означает, что два данных трёхчлена имеют равные наименьшие значения $-q^2$. Наименьшее значение их полусуммы, очевидно, не меньше $-q^2$ (оно является полусуммой каких-то значений исходных трёхчленов), то есть оно равно $-r^2$

при $0 \leqslant r \leqslant q$. Поэтому и разность корней полусуммы, то есть $2r$, не превосходит $2q$.

Замечание. Практически такое же рассуждение показывает, что утверждение задачи остаётся верным, если вместо двух приведённых трёхчленов рассмотреть два произвольных квадратных трёхчлена с положительными старшими коэффициентами.

Комментарий. Доказано, что дискриминанты $f(x)$ и $g(x)$ равны (или что графики этих квадратных трёхчленов имеют равные ординаты вершин), дальнейших содержательных продвижений нет — 1 балл.

Утверждаются неверные факты, не повлиявшие в дальнейшем на решение (например, утверждается, что разность корней равна дискриминанту, а далее используется верная формула) — снимается 1 балл.

9.2. Изначально в строку выписывают 250 букв — 125 букв А и 125 букв Б в некотором порядке. Затем за одну операцию можно взять любой кусок из нескольких подряд стоящих букв, среди которых поровну букв А и Б, и переставить буквы в этом куске в обратном порядке, поменяв в этом куске все буквы А на буквы Б и буквы Б на буквы А. (Например, из строки $\text{А}\underbrace{\text{БАББАА}}\text{Б}$ можно одной операцией получить строку $\text{А}\underbrace{\text{ББААБА}}\text{Б}$.) Можно ли выписать исходную строку и совершить несколько операций так, чтобы в результате на доске оказалась та же строка, буквы которой записаны в обратном порядке? (*С. Берлов*)

Ответ. Нельзя.

Первое решение. Пронумеруем позиции в строке слева направо числами от 1 до 250. Пусть в исходной строке x букв А стоят на нечётных местах (т. е. местах с нечётными номерами). Покажем, что в полученных строках это количество не изменится.

Действительно, пусть для некоторой операции выбран кусок, в котором по y букв А и Б, причём t из этих букв А стоят на нечётных местах. Тогда на чётных местах в куске стоят $y - t$ букв А и, следовательно, $y - (y - t) = t$ букв Б. После операции именно из этих t букв Б возникнут буквы А, стоящие на нечётных местах куска — значит, количество таких букв А не поменяется.

Итак, в любой полученной строке будет ровно x букв А на нечётных местах. Однако, если строка развернётся задом наперёд, то на нечётных местах должны оказаться ровно те буквы, которые раньше были на чётных местах, а там было ровно $125 - x$ букв А. Поскольку $125 - x \neq x$, требуемое невозможно.

Замечание. В решении выше предъявлен *инвариант* процесса (то есть величина, остающаяся постоянной) — количество букв А на нечётных местах. Существуют и другие похожие инварианты, позволяющие решить задачу. Например, можно показать, что сумма номеров мест, на которых стоят буквы А, является таким инвариантом.

Второе решение. Предъявим ещё один инвариант. В строке всего 125^2 пар, состоящих из буквы А и буквы Б. Назовём такую пару *левой*, если в ней А стоит левее Б, и *правой* иначе. Покажем, что при операции количество левых пар не изменяется. Из этого будет следовать невозможность требуемого, ибо при развороте строки все пары меняют тип, а значит, количество левых пар меняет чётность.

Рассмотрим одну операцию с куском длины $2y$. При этой операции пары из букв, не лежащих в куске, сохраняют свой тип. Далее, для каждой буквы вне куска было ровно y пар, содержащих её и букву из куска; столько же таких пар осталось, и все эти пары были и стали одного и того же типа.

Значит, осталось проследить за парами букв в самом куске. Но каждая пара сменила свой тип дважды: когда кусок развернулся и когда все буквы заменили на другие. Значит, количество левых пар в куске также не изменилось.

Замечание. Можно показать, что по количеству левых пар восстанавливается сумма номеров мест букв А (и наоборот). Таким образом, инвариант в этом решении — тот же, что и в предыдущем замечании.

Комментарий. Неверный инвариант или инвариант, который не всегда отличает строку от её обратной — 0 баллов.

Сформулирован верный инвариант и доказано, что он ВСЕГДА отличает строку и её обратную — 3 балла.

В решении с подсчётом пар АБ и БА не учитываются или неверно учитываются пары, в которых одна буква внутри куска, а другая вне — снимается 2 балла.

Вводится «локальная» нумерация букв в куске и в этой нумерации доказывается, что сумма номеров А не меняется, но нет объяснения, как эта сумма связана с «глобальной» суммой в строке — снимается 1 балл.

9.3. Каждое натуральное число, большее 1000, окрасили либо в красный, либо в синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух различных красных чисел — синее. Может ли случиться, что никакие два синих числа не отличаются на 1? (*С. Берлов*)

Ответ. Не может.

Первое решение. Предположим, что это возможно.

Лемма. *Пусть число n синее; тогда n^2 — красное.*

Доказательство. Поскольку n синее, числа $n-1$ и $n+1$ красные, иначе два синих числа отличаются на 1. Поэтому число $n^2-1=(n-1)(n+1)$ синее. Значит, n^2 красное. $\square$

Очевидно, что существует синее число $k>1001$; по лемме число k^2 красное. Рассмотрим два случая.

Пусть число k^3 синее. Тогда по лемме число $k^6=(k^3)^2$ красное. Поскольку $k^2\cdot k^4=k^6$, и числа k^2 и k^6 красные, то число k^4 обязано быть синим. По лемме число $k^8=(k^4)^2$ красное, но оно является произведением красных чисел k^2 и k^6. Этого не может быть.

Пусть теперь число k^3 красное. Тогда число $k^5=k^2\cdot k^3$ синее, и по лемме число $k^{10}=(k^5)^2$ красное. Поскольку $k^{10}=$ $=k^2\cdot k^8=k^3\cdot k^7$ и числа k^2 и k^3 красные, числа k^7 и k^8 должны быть синими, а тогда, по лемме, числа $k^{14}=(k^7)^2$ и $k^{16}=(k^8)^2$ красные. Но тогда красное число k^{16} равно произведению красных чисел k^2 и k^{14}. Противоречие.

Второе решение. Опять же предположим противное. Начнём со следующего замечания. Пусть a и b — два различных красных числа; тогда число $ab+1$ тоже красное. Действительно, по условию число ab синее, а тогда $ab+1$ красное.

Цвета чисел не могут строго чередоваться — иначе все числа одной чётности будут красными, а тогда найдутся и два красных числа с красным произведением. Значит, есть два одноцветных числа, отличающихся на 1 — пусть это a и $a+1$. Из условия их общий цвет — красный.

Из замечания выше получаем сначала, что число $b = a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$ красное, а затем — что число $c = a^3 + a^2 + a + 1 = ab + 1$ тоже красное. Значит, по условию, число $d = a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a + 1 = (a+1)c$ синее.

С другой стороны, из того же замечания число $p = (a + 1)b + 1 = a^3 + 2a^2 + 2a + 2$ красное. Значит, по условию, число $ap = a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a = d - 1$ тоже синее. Итак, мы нашли два соседних синих числа d и $d-1$, что невозможно.

Комментарий. Если в задаче был ответ «да», то ставилось 0 баллов, и пример не проверялся.

Доказательство того, что, начиная с некоторого места, цвета не могут чередоваться, не оценивалось.

Доказано, что если a — синее число, то a^2 — красное (или $a^2 - 1$ — синее), или доказано, что если a и b — красные числа, то a^2b^2 — красное — 1 балл.

Доказано, что произведение двух синих чисел является красным — 1 балл.

Доказано, что нет трёх последовательных красных чисел (или задача сведена к случаю, когда нет трёх последовательных красных чисел) — 1 балл.

При отсутствии иных продвижений, кроме описанных в трёх предыдущих критериях, больше 2 баллов не ставилось.

9.4. Точка X лежит строго внутри описанной около треугольника ABC окружности. Обозначим через I_B и I_C центры вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон AC и AB соответственно. Докажите, что $XI_B \cdot XI_C > XB \cdot XC$.

(*Д. Бродский*)

Решение. Обозначим через Γ окружность с диаметром I_BI_C. Поскольку $CI_C \perp CI_B$ и $BI_C \perp BI_B$, точки B и C лежат на Γ (см. рис. 1).

Обозначим через I центр вписанной окружности ABC. Если точка X лежит внутри угла BIC, то углы XBI_C и XCI_B тупые, поэтому $XI_B > XC$ и $XI_C > XB$. Перемножив эти неравенства, получим требуемое.

В противном случае точки X и A лежат в одной полу-

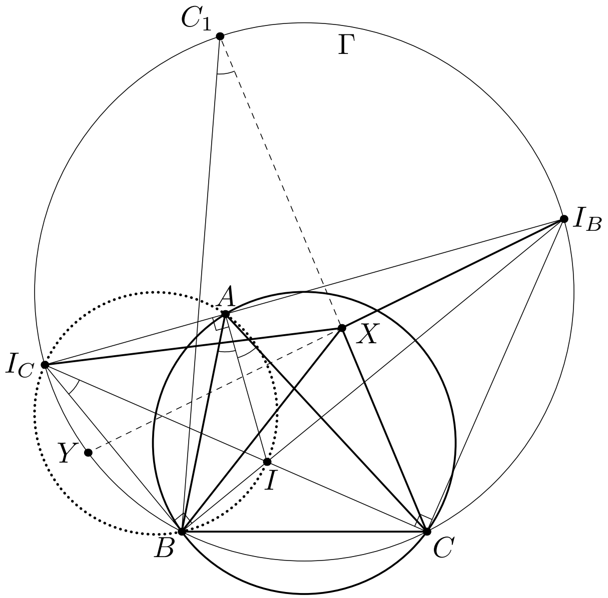

Рис. 1

плоскости относительно прямой BC. Продлим лучи CX и I_BX до пересечения с Γ в точках C_1 и Y соответственно. Поскольку четырёхугольник AI_CBI вписан в окружность с диаметром II_C, то $\angle XC_1B = \angle II_CB = \angle IAB = \frac{1}{2}\angle CAB < \frac{1}{2}\angle CXB = \frac{1}{2}(\angle XC_1B + \angle XBC_1)$, откуда $\angle XC_1B < \angle XBC_1$, поэтому $XC_1 > XB$. Кроме того, поскольку длина хорды окружности не превосходит длины диаметра, $I_BX + XI_C \geqslant I_BI_C \geqslant I_BY = I_BX + XY$, откуда $XI_C > XY$. Следовательно, $XI_B \cdot XI_C \geqslant XI_B \cdot XY = XC \cdot XC_1 > XC \cdot XB$.

Замечание. Если разрешить точке X находиться на описанной окружности треугольника ABC, то неравенство обращается в равенство в вершине A и в середине дуги CAB.

Комментарий. Переформулировка условия задачи без существенных продвижений — 0 баллов.

Формулировки известных геометрических теорем и фактов без продвижений в решении задачи — 0 баллов.

Недоведённый координатный или иной счёт — 0 баллов.

Доказательство требуемого неравенства для части круга, включающей сегмент, отрезаемый хордой BC и находящийся по другую сторону от вершины A — 1 балл.

Доказательство существования двух точек равенства (вершина A и середина дуги BAC) — 1 балл.

Баллы по предыдущим пунктам не суммируются.

Решение верное, но упущен случай, когда точки A и X находятся в разных полуплоскостях относительно прямой BC — 6 баллов.