10 класс

Задача 10.1. **(а)** *(2 балла)* Натуральное число n меньше 120. Какой наибольший остаток может давать число 209 при делении на n?

(б) *(2 балла)* Натуральное число n меньше 90. Какой наибольший остаток может давать число 209 при делении на n?

Ответ: **(а)** 104. **(б)** 69.

Решение. Пусть $209 = nk + r$, где k — неполное частное, а r — остаток от деления. Поскольку $r < n$, имеем $n(k+1) = nk + n > nk + r = 209 = nk + r > rk + r = r(k+1)$, откуда

$$k + 1 > \frac{209}{n} \quad \text{и} \quad r < \frac{209}{k+1}.$$

(а) Из условия $n < 120$ следует, что $k + 1 > \frac{209}{119}$, т. е. $k \geqslant 1$. Тогда $r < \frac{209}{2}$, т. е. $r \leqslant 104$. Значение $r = 104$ возможно при $n = 105$ и $k = 1$.

(б) Из условия $n < 90$ следует, что $k + 1 > \frac{209}{89}$, т. е. $k \geqslant 2$. Тогда $r < \frac{209}{3}$, т. е. $r \leqslant 69$. Значение $r = 69$ возможно при $n = 70$ и $k = 2$. □

Задача 10.2. Действительное число a таково, что из двух уравнений

$$5 + |x - 2| = a \;\text{ и }\; 7 - |2x + 6| = a$$

одно имеет ровно один корень, а другое — ровно два корня. Чему может быть равно a? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 5, 7.

Решение. Рассмотрим первое уравнение, эквивалентное уравнению $|x - 2| = a - 5$. Если $a - 5 < 0$, то корней у него вообще нет. Если $a - 5 > 0$, то у него ровно два корня $x = 2 \pm (a - 5)$. Если же $a - 5 = 0$, т. е. $a = 5$, то у него ровно один корень $x = 2$.

Теперь рассмотрим второе уравнение, эквивалентное уравнению $|2x + 6| = 7 - a$. Если $7 - a < 0$, то корней у него вообще нет. Если $7 - a > 0$, то у него ровно два корня $x = -3 \pm \frac{7-a}{2}$. Если же $7 - a = 0$, т. е. $a = 7$, то у него ровно один корень $x = -3$.

Мы получили, что при $a = 5$ первое уравнение имеет один корень 2, а второе уравнение имеет два корня -4 и -2, поэтому такое a нам подходит; а при $a = 7$ второе уравнение имеет один корень -3, а первое уравнение имеет корни 0 и 4, поэтому такое a нам тоже подходит. □

Задача 10.3. На доске написаны натуральные числа a, b, c, d. Известно, что среди шести сумм

$$a + b, \quad b + c, \quad c + d, \quad d + a, \quad a + c, \quad b + d$$

три равны 23, а три других равны 34.
(а) *(1 балл)* Чему равно $a + b + c + d$?
(б) *(3 балла)* Чему равно наименьшее из чисел a, b, c, d?

Ответ: **(а)** 57. **(б)** 6.

Решение. **(а)** Сложим все 6 сумм $a + b, b + c, c + d, d + a, a + c, b + d$. Поскольку три из них равны 23, а ещё три равны 34, у нас получится $23 \cdot 3 + 34 \cdot 3$. С другой стороны, у нас получится $3(a + b + c + d)$. Отсюда следует, что

$$a + b + c + d = \frac{23 \cdot 3 + 34 \cdot 3}{3} = 57.$$

(б) Предположим, что среди чисел a, b, c, d есть хотя бы три различных. Не нарушая общности, будем считать, что это a, b и c, причём $a < b < c$. Тогда $a + b < a + c < b + c$, что противоречит условию задачи.

Предположим, что все числа a, b, c, d одинаковы. Тогда и все их попарные суммы тоже одинаковы, что вновь противоречит условию задачи.

Значит, среди чисел a, b, c, d есть ровно два различных. Не нарушая общности, достаточно рассмотреть три случая:

- $a = b = c < d$;
- $a = b < c = d$;
- $a < b = c = d$.

Случай 1. Пусть $a = b = c < d$. Тогда

$$2a = a + b = a + c = b + c < a + d = b + d = c + d.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 2a = 23, \\ a + d = 34, \end{cases}$$

но она не разрешима в натуральных числах.

Случай 2. Пусть $a = b < c = d$. Тогда $a + b < b + c < c + d$, что противоречит условию задачи.

Случай 3. Пусть $a < b = c = d$. Тогда

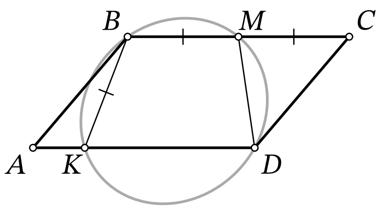
$$a + b = a + c = a + d < b + d = b + c = c + d = 2d.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} a + d = 23, \\ 2d = 34, \end{cases}$$

решением которой является $a = 6$, $b = c = d = 17$. Значит, наименьшее из чисел — это 6. □

Задача 10.4. Дан параллелограмм $ABCD$, точка M — середина стороны BC. На стороне AD нашлась точка K такая, что $BK = BM$ и четырёхугольник $KBMD$ является вписанным.
(а) *(2 балла)* Чему равна длина отрезка MD, если $AD = 17$?
(б) *(2 балла)* Сколько градусов составляет угол KMD, если $\angle BAD = 46°$?



Ответ: **(а)** 8,5. **(б)** 48.

Решение. **(а)** Заметим, что $KBMD$ — вписанная трапеция, поэтому она равнобокая, т. е. $MD = KB$. Отсюда

$$MD = KB = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} = 8{,}5.$$

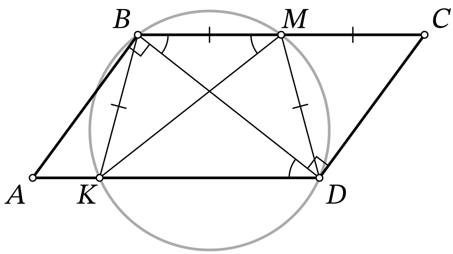


Рис. 7: к решению задачи 10.4

(б) Так как $MD = MB = MC$, угол BDC — прямой (как известно, если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то она проведена из прямого угла). Из того, что $AB \parallel CD$, следует, что угол ABD — тоже прямой (рис. 7).

Отсюда $\angle BDK = 90° - \angle BAD$, а из вписанности четырёхугольника $KBMD$ следует, что $\angle BMK = \angle BDK = 90° - \angle BAD$.

Кроме того, из параллельности следует, что $\angle MBD = \angle BDK$, а из равнобедренности треугольника BMD — что $\angle BMD = 180° - 2\angle MBD = 2\angle BAD$.

Получаем

$$\angle KMD = \angle BMD - \angle BMK = 2\angle BAD - (90° - \angle BAD) =$$
$$= 3\angle BAD - 90° = 3 \cdot 46° - 90° = 48°. \qquad \square$$

Задача 10.5. Однажды зимой 43 ребёнка бросались снежками. Каждый из них бросил ровно один снежок в кого-то другого. Известно, что:

- первый бросил снежок в того, кто бросил снежок во второго,
- второй бросил снежок в того, кто бросил снежок в третьего,

  …
- сорок третий бросил снежок в того, кто бросил снежок в первого.

Какой номер у того, кто бросил снежок в третьего?

Ответ: 24.

Решение. Во-первых, заметим, что не только каждый бросил ровно один снежок, но и в каждого бросили ровно один снежок. Действительно, из фразы «первый бросил снежок в того, кто бросил снежок во второго» следует, что кто-то бросил снежок во второго; аналогично устанавливается, что в каждого бросили хотя бы один снежок. Но так как всего снежков столько же, сколько детей, то в каждого должны были бросить ровно один снежок.

Изобразим каждого ребёнка точкой; проведём из точки A в точку B стрелочку, если ребёнок A бросил снежок в B. Так как в каждую точку ровно одна стрелочка входит и из каждой ровно одна выходит, то стрелочки соединяются в один или несколько циклов.

Рассмотрим тот из циклов, который включает первого ребёнка. Пусть первый бросил снежок в ребёнка с номером x. Тогда ребёнок с номером x бросил снежок во второго, второй — в ребёнка с номером $x+1$ и так далее. Таким образом, этот цикл устроен следующим образом:

$$\ldots \to 1 \to x \to 2 \to (x+1) \to 3 \to (x+2) \to 4 \to \ldots$$

Если идти по нему с шагом в две стрелочки, то получаются числа $1, 2, 3, 4, \ldots$ — все числа от 1 до 43. Значит, в цикл входят все 43 ребёнка, и на самом деле других циклов нет.

Заметим, что если начать с 1 и сделать 22 раза шаг в две стрелочки, мы пройдём целый цикл и ещё одну стрелочку, то есть попадём в x. Значит, $x = 23$. Тогда номер того, кто бросил снежок в третьего, — это $x + 1 = 24$. □

Задача 10.6. Пару натуральных чисел (a, p) назовём *хорошей*, если число $a^3 + p^3$ делится на $a^2 - p^2$, причём $a > p$.
(а) *(1 балл)* Укажите любое возможное значение a, для которого пара $(a, 13)$ — хорошая.
(б) *(3 балла)* Найдите количество хороших пар, для которых p — простое число, меньшее 20.

Ответ: **(а)** любое из чисел 14, 26, 182. **(б)** 24.

Решение. Так как $a^3 + p^3 = (a+p)(a^2 - ap + p^2)$, а $a^2 - p^2 = (a+p)(a-p)$, условие делимости равносильно тому, что $a^2 - ap + p^2 = a(a-p) + p^2$ делится на $a - p$. Заметим, что $a(a-p)$ делится на $a-p$, поэтому p^2 должно делиться на натуральное число $a-p$, т. е. $a-p$ является делителем p^2. Так как p — простое число, то у числа p^2 есть всего 3 натуральных делителя: 1, p и p^2. Тогда для любого простого p есть ровно 3 варианта для числа a: это $1+p$, $p+p$ и p^2+p (очевидно, каждое из этих чисел больше p).

(a) При $p=13$ получаем $a=14,26,182$.

(b) Найдём количество простых чисел, меньших 20. Их ровно 8: это 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Значит, всего хороших пар $3\cdot 8=24$. □

Задача 10.7. Карлсон за один приём пищи может съесть не более 5 кг варенья. Если он открывает новую банку варенья, то он обязан съесть её полностью за этот приём пищи. (Карлсон не будет открывать новую банку, если ему придётся съесть более 5 кг варенья вместе с только что съеденным.)

У Малыша есть несколько банок малинового варенья общей массой 50 кг, каждая из них весит не более 1 кг. За какое наименьшее количество приёмов пищи Карлсон гарантированно сможет съесть всё варенье?

Ответ: 12.

Решение. Докажем, что за 12 приёмов пищи Карлсон всегда сможет съесть всё варенье.

Будем раскладывать банки в кучки по следующему алгоритму. В каждую кучку (сначала в первую, потом во вторую и так далее) будем класть банки по одной до тех пор, пока в ней не станет больше чем 5 кг варенья. Последнюю банку, которую мы положим в кучку, будем называть *лишней*. Поскольку у Малыша 50 кг варенья, всего таких кучек окажется не более 10.

Очевидно, что если из кучки убрать лишнюю банку, то всё остальное варенье Карлсон сможет съесть за один приём пищи. То есть всё варенье, кроме лишних банок, Карлсон съест за 10 приёмов пищи. А на лишние банки он потратит не более 2 приёмов пищи, так как их не более 10 штук, и каждая из них весит не более 1 кг.

Теперь покажем, что Карлсон не всегда сможет съесть всё варенье за 11 приёмов пищи. Пусть банок всего $5\cdot 11+1=56$, и в каждой из них $\frac{25}{28}$ кг варенья. Если бы Карлсону всё это удалось съесть за 11 приёмов пищи, то по принципу Дирихле нашёлся бы приём пищи, за который он съел хотя бы 6 банок варенья. Но $6\cdot\frac{25}{28}=\frac{150}{28}>5$, противоречие. □

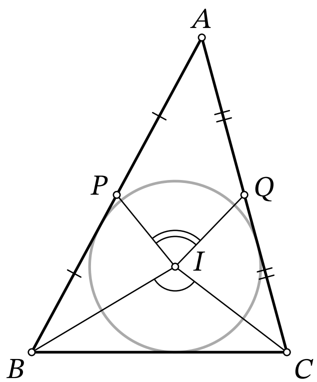
Другое построение примера. Продемонстрируем, что Карлсон за один раз сможет съесть хотя бы 25/6 кг варенья, если варенья осталось хотя бы такое количество.

Сначала будем выбирать банки по одной, пока не наберём в сумме больше 25/6 кг варенья. Потом начнём возвращать выбранные банки по одной так, чтобы в сумме оставалось не менее 25/6 кг варенья.

Предположим, что мы уже не можем вернуть ни одну из выбранных банок, но варенья в них в сумме всё ещё больше 5 кг. Ясно, что тогда у нас осталось не менее 6 банок, и наименьшая из них содержит не более 1/6 общей массы варенья. Выберем её и вернём; тогда останется не менее $5/6 \cdot 5 = 25/6$ кг варенья. Противоречие. Следовательно, оставшиеся выбранные банки Карлсон может открыть и съесть за один раз.

Получается, что Карлсон в любом случае сможет съедать хотя бы 25/6 кг варенья за один раз, кроме последнего раза, когда он доест оставшееся. Тогда, очевидно, за $50 / (25/6) = 12$ приёмов пищи он справится. $\square$

Задача 10.8. Дан треугольник ABC. Пусть точка I — центр его вписанной окружности, а точки P и Q — середины сторон AB и AC соответственно. Оказалось, что $\angle PIQ + \angle BIC = 180°$. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 20$ и $AC = 14$.



Ответ: 34/3.

Решение. Из условия следует, что $\angle BIP + \angle CIQ = 180°$. Кроме того, отметим, что $PQ \parallel BC$ как средняя линия треугольника.

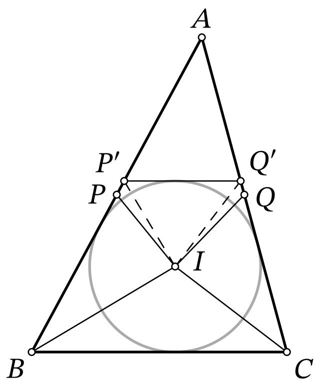


Рис. 8: к решению задачи 10.8

Проведём к вписанной окружности треугольника ABC касательную, параллельную отрезку BC. Обозначим через P' и Q' точки пересечения этой касательной со сторонами AB и AC соответственно (рис. 8). Поскольку в трапецию $P'Q'CB$ вписана окружность с центром I, то точка I является точкой пересечения биссектрис всех четырёх углов этой трапеции. Так как $P'Q' \parallel BC$, то $\angle P'Q'C + \angle BCQ' = 180°$. Тогда $\angle IQ'C + \angle ICQ' = 90°$, откуда $\angle CIQ' = 90°$. Аналогично $\angle BIP' = 90°$. Тогда

$$\angle BIP' + \angle CIQ' = 180° = \angle BIP + \angle CIQ.$$

Ясно, что если отрезок $P'Q'$ находится выше отрезка PQ, то $\angle BIP' > \angle BIP$ и $\angle CIQ' > \angle CIQ$, а если ниже, то $\angle BIP' < \angle BIP$ и $\angle CIQ' < \angle CIQ$. В обоих этих случаях полученное равенство невозможно. Следовательно, точки P' и Q' совпадают с точками P и Q, т. е. четырёхугольник $PQCB$ является описанной трапецией.

Заметим, что $BP = AP = 10$ и $CQ = AQ = 7$, а также $PQ = \frac{1}{2}BC$. Значит, по свойству описанного четырёхугольника

$$10 + 7 = BP + CQ = PQ + BC = \frac{3}{2}BC,$$

откуда и получаем $BC = \frac{34}{3}$. □

10 класс

Вариант 10.1.1. **(а)** *(2 балла)* Натуральное число n меньше 120. Какой наибольший остаток может давать число 209 при делении на n?

(б) *(2 балла)* Натуральное число n меньше 90. Какой наибольший остаток может давать число 209 при делении на n?

Ответ: **(а)** 104. **(б)** 69.

Вариант 10.1.2. **(а)** *(2 балла)* Натуральное число n меньше 135. Какой наибольший остаток может давать число 239 при делении на n?

(б) *(2 балла)* Натуральное число n меньше 100. Какой наибольший остаток может давать число 239 при делении на n?

Ответ: **(а)** 119. **(б)** 79.

Вариант 10.1.3. **(а)** *(2 балла)* Натуральное число n меньше 150. Какой наибольший остаток может давать число 269 при делении на n?

(б) *(2 балла)* Натуральное число n меньше 110. Какой наибольший остаток может давать число 269 при делении на n?

Ответ: **(а)** 134. **(б)** 89.

Вариант 10.1.4. **(а)** *(2 балла)* Натуральное число n меньше 105. Какой наибольший остаток может давать число 179 при делении на n?

(б) *(2 балла)* Натуральное число n меньше 80. Какой наибольший остаток может давать число 179 при делении на n?

Ответ: **(а)** 89. **(б)** 59.

Вариант 10.2.1. Действительное число a таково, что из двух уравнений

$$5 + |x - 2| = a \quad \text{и} \quad 7 - |2x + 6| = a$$

одно имеет ровно один корень, а другое — ровно два корня. Чему может быть равно a? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 5, 7.

Вариант 10.2.2. Действительное число a таково, что из двух уравнений

$$6 + |x - 2| = a \quad \text{и} \quad 7 - |2x + 6| = a$$

одно имеет ровно один корень, а другое — ровно два корня. Чему может быть равно a? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 6, 7.

Вариант 10.2.3. Действительное число a таково, что из двух уравнений

$$6 + |x - 2| = a \quad \text{и} \quad 8 - |2x + 6| = a$$

одно имеет ровно один корень, а другое — ровно два корня. Чему может быть равно a? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 6, 8.

Вариант 10.2.4. Действительное число a таково, что из двух уравнений

$$7 + |x - 2| = a \quad \text{и} \quad 8 - |2x + 6| = a$$

одно имеет ровно один корень, а другое — ровно два корня. Чему может быть равно a? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 7, 8.

Вариант 10.3.1. На доске написаны натуральные числа a, b, c, d. Известно, что среди шести сумм

$$a + b, \quad b + c, \quad c + d, \quad d + a, \quad a + c, \quad b + d$$

три равны 23, а три других равны 34.
(а) *(1 балл)* Чему равно $a + b + c + d$?
(б) *(3 балла)* Чему равно наименьшее из чисел a, b, c, d?

Ответ: **(а)** 57. **(б)** 6.

Вариант 10.3.2. На доске написаны натуральные числа a, b, c, d. Известно, что среди шести сумм

$$a + b, \quad b + c, \quad c + d, \quad d + a, \quad a + c, \quad b + d$$

три равны 23, а три других равны 32.
(а) *(1 балл)* Чему равно $a + b + c + d$?
(б) *(3 балла)* Чему равно наименьшее из чисел a, b, c, d?

Ответ: **(а)** 55. **(б)** 7.

Вариант 10.3.3. На доске написаны натуральные числа a, b, c, d. Известно, что среди шести сумм

$$a + b, \quad b + c, \quad c + d, \quad d + a, \quad a + c, \quad b + d$$

три равны 23, а три других равны 30.
(а) *(1 балл)* Чему равно $a + b + c + d$?
(б) *(3 балла)* Чему равно наименьшее из чисел a, b, c, d?

Ответ: **(а)** 53. **(б)** 8.

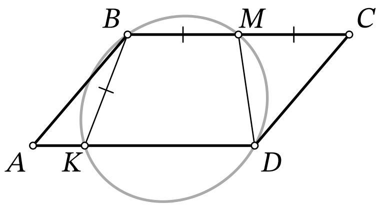
Вариант 10.3.4. На доске написаны натуральные числа a, b, c, d. Известно, что среди шести сумм

$$a+b,\quad b+c,\quad c+d,\quad d+a,\quad a+c,\quad b+d$$

три равны 23, а три других равны 28.
(а) *(1 балл)* Чему равно $a+b+c+d$?
(б) *(3 балла)* Чему равно наименьшее из чисел a, b, c, d?

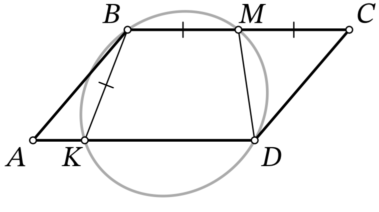
Ответ: **(а)** 51. **(б)** 9.

Вариант 10.4.1. Дан параллелограмм $ABCD$, точка M — середина стороны BC. На стороне AD нашлась точка K такая, что $BK = BM$ и четырёхугольник $KBMD$ является вписанным.
(а) *(2 балла)* Чему равна длина отрезка MD, если $AD = 17$?
(б) *(2 балла)* Сколько градусов составляет угол KMD, если $\angle BAD = 46°$?



Ответ: **(а)** 8,5. **(б)** 48.

Вариант 10.4.2. Дан параллелограмм $ABCD$, точка M — середина стороны BC. На стороне AD нашлась точка K такая, что $BK = BM$ и четырёхугольник $KBMD$ является вписанным.
(а) *(2 балла)* Чему равна длина отрезка MD, если $AD = 19$?
(б) *(2 балла)* Сколько градусов составляет угол KMD, если $\angle BAD = 44°$?

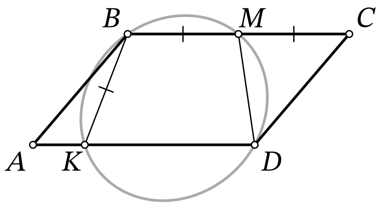


Ответ: **(а)** 9,5. **(б)** 42.

Вариант 10.4.3. Дан параллелограмм $ABCD$, точка M — середина стороны BC. На стороне AD нашлась точка K такая, что $BK = BM$ и четырёхугольник $KBMD$ является вписанным.

(а) *(2 балла)* Чему равна длина отрезка MD, если $AD = 15$?

(б) *(2 балла)* Сколько градусов составляет угол KMD, если $\angle BAD = 43°$?

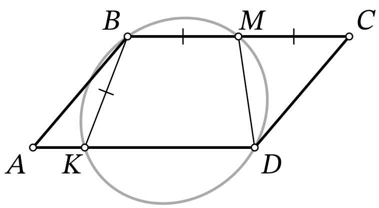


Ответ: **(а)** 7,5. **(б)** 39.

Вариант 10.4.4. Дан параллелограмм $ABCD$, точка M — середина стороны BC. На стороне AD нашлась точка K такая, что $BK = BM$ и четырёхугольник $KBMD$ является вписанным.

(а) *(2 балла)* Чему равна длина отрезка MD, если $AD = 13$?

(б) *(2 балла)* Сколько градусов составляет угол KMD, если $\angle BAD = 42°$?



Ответ: **(а)** 6,5. **(б)** 36.

Вариант 10.5.1. Однажды зимой 43 ребёнка бросались снежками. Каждый из них бросил ровно один снежок в кого-то другого. Известно, что:

- первый бросил снежок в того, кто бросил снежок во второго,
- второй бросил снежок в того, кто бросил снежок в третьего,

  …

- сорок третий бросил снежок в того, кто бросил снежок в первого.

Какой номер у того, кто бросил снежок в третьего?

Ответ: 24.

Вариант 10.5.2. Однажды зимой 43 ребёнка бросались снежками. Каждый из них бросил ровно один снежок в кого-то другого. Известно, что:

- первый бросил снежок в того, кто бросил снежок во второго,
- второй бросил снежок в того, кто бросил снежок в третьего,

  …

- сорок третий бросил снежок в того, кто бросил снежок в первого.

Какой номер у того, кто бросил снежок в четвёртого?

Ответ: 25.

Вариант 10.5.3. Однажды зимой 43 ребёнка бросались снежками. Каждый из них бросил ровно один снежок в кого-то другого. Известно, что:

- первый бросил снежок в того, кто бросил снежок во второго,
- второй бросил снежок в того, кто бросил снежок в третьего,

  …

- сорок третий бросил снежок в того, кто бросил снежок в первого.

Какой номер у того, кто бросил снежок в пятого?

Ответ: 26.

Вариант 10.5.4. Однажды зимой 43 ребёнка бросались снежками. Каждый из них бросил ровно один снежок в кого-то другого. Известно, что:

- первый бросил снежок в того, кто бросил снежок во второго,
- второй бросил снежок в того, кто бросил снежок в третьего,

  …

- сорок третий бросил снежок в того, кто бросил снежок в первого.

Какой номер у того, кто бросил снежок в шестого?

Ответ: 27.

Вариант 10.6.1. Пару натуральных чисел (a, p) назовём *хорошей*, если число $a^3 + p^3$ делится на $a^2 - p^2$, причём $a > p$.
(а) *(1 балл)* Укажите любое возможное значение a, для которого пара $(a, 13)$ — хорошая.
(б) *(3 балла)* Найдите количество хороших пар, для которых p — простое число, меньшее 20.

Ответ: **(а)** любое из чисел 14, 26, 182. **(б)** 24.

Вариант 10.6.2. Пару натуральных чисел (a, p) назовём *хорошей*, если число $a^3 + p^3$ делится на $a^2 - p^2$, причём $a > p$.
(а) *(1 балл)* Укажите любое возможное значение a, для которого пара $(a, 17)$ — хорошая.
(б) *(3 балла)* Найдите количество хороших пар, для которых p — простое число, меньшее 18.

Ответ: **(а)** любое из чисел 18, 34, 306. **(б)** 21.

Вариант 10.6.3. Пару натуральных чисел (a, p) назовём *хорошей*, если число $a^3 + p^3$ делится на $a^2 - p^2$, причём $a > p$.
(а) *(1 балл)* Укажите любое возможное значение a, для которого пара $(a, 19)$ — хорошая.
(б) *(3 балла)* Найдите количество хороших пар, для которых p — простое число, меньшее 24.

Ответ: **(а)** любое из чисел 20, 38, 380. **(б)** 27.

Вариант 10.6.4. Пару натуральных чисел (a, p) назовём *хорошей*, если число $a^3 + p^3$ делится на $a^2 - p^2$, причём $a > p$.
(а) *(1 балл)* Укажите любое возможное значение a, для которого пара $(a, 11)$ — хорошая.
(б) *(3 балла)* Найдите количество хороших пар, для которых p — простое число, меньшее 16.

Ответ: **(а)** любое из чисел 12, 22, 132. **(б)** 18.

Вариант 10.7.1. Карлсон за один приём пищи может съесть не более 5 кг варенья. Если он открывает новую банку варенья, то он обязан съесть её полностью за этот приём пищи. (Карлсон не будет открывать новую банку, если ему придётся съесть более 5 кг варенья вместе с только что съеденным.)

У Малыша есть несколько банок малинового варенья общей массой 50 кг, каждая из них весит не более 1 кг. За какое наименьшее количество приёмов пищи Карлсон гарантированно сможет съесть всё варенье?

Ответ: 12.

Вариант 10.7.2. Карлсон за один приём пищи может съесть не более 5 кг варенья. Если он открывает новую банку варенья, то он обязан съесть её полностью за этот приём пищи. (Карлсон не будет открывать новую банку, если ему придётся съесть более 5 кг варенья вместе с только что съеденным.)

У Малыша есть несколько банок малинового варенья общей массой 75 кг, каждая из них весит не более 1 кг. За какое наименьшее количество приёмов пищи Карлсон гарантированно сможет съесть всё варенье?

Ответ: 18.

Вариант 10.7.3. Карлсон за один приём пищи может съесть не более 6 кг варенья. Если он открывает новую банку варенья, то он обязан съесть её полностью за этот приём пищи. (Карлсон не будет открывать новую банку, если ему придётся съесть более 6 кг варенья вместе с только что съеденным.)

У Малыша есть несколько банок малинового варенья общей массой 72 кг, каждая из них весит не более 1 кг. За какое наименьшее количество приёмов пищи Карлсон гарантированно сможет съесть всё варенье?

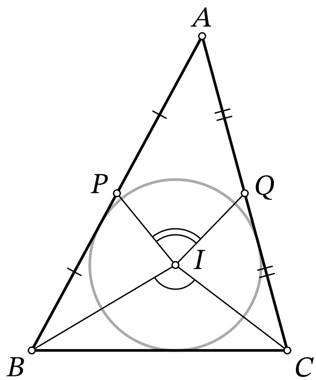
Ответ: 14.

Вариант 10.7.4. Карлсон за один приём пищи может съесть не более 6 кг варенья. Если он открывает новую банку варенья, то он обязан съесть её полностью за этот приём пищи. (Карлсон не будет открывать новую банку, если ему придётся съесть более 6 кг варенья вместе с только что съеденным.)

У Малыша есть несколько банок малинового варенья общей массой 108 кг, каждая из них весит не более 1 кг. За какое наименьшее количество приёмов пищи Карлсон гарантированно сможет съесть всё варенье?

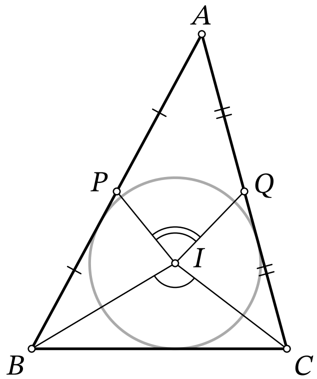
Ответ: 21.

Вариант 10.8.1. Дан треугольник ABC. Пусть точка I — центр его вписанной окружности, а точки P и Q — середины сторон AB и AC соответственно. Оказалось, что $\angle PIQ + \angle BIC = 180°$. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 20$ и $AC = 14$.



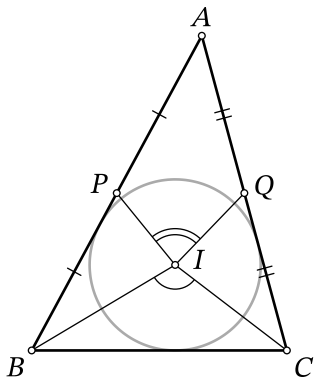
Ответ: 34/3.

Вариант 10.8.2. Дан треугольник ABC. Пусть точка I — центр его вписанной окружности, а точки P и Q — середины сторон AB и AC соответственно. Оказалось, что $\angle PIQ + \angle BIC = 180°$. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 22$ и $AC = 16$.



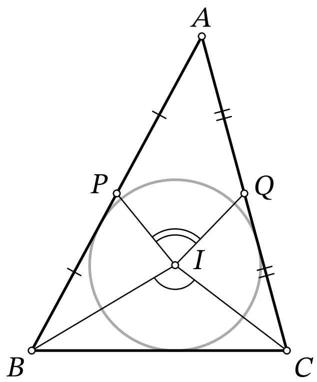
Ответ: 38/3.

Вариант 10.8.3. Дан треугольник ABC. Пусть точка I — центр его вписанной окружности, а точки P и Q — середины сторон AB и AC соответственно. Оказалось, что $\angle PIQ + \angle BIC = 180°$. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 22$ и $AC = 18$.



Ответ: 40/3.

Вариант 10.8.4. Дан треугольник ABC. Пусть точка I — центр его вписанной окружности, а точки P и Q — середины сторон AB и AC соответственно. Оказалось, что $\angle PIQ + \angle BIC = 180°$. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 24$ и $AC = 20$.



Ответ: 44/3.