Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **13 февраля 2023 г.** (I тур) и **14 февраля 2023 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2022–2023 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$?

Решение 1.

Ответ: нет.

Предположим противное. Пусть S_{m+1} делится на 2^s, но не делится на 2^{s+1}; тогда $s \geq 2$. Это значит, что среди чисел $1, 2, \ldots, m+1$ есть число a, делящееся на 2^s. Но тогда число $a/2$ уже не превосходит m и делится на 2^{s-1}; значит, и S_m делится на 2^{s-1}. Поэтому S_{m+1}/S_m не может делиться на степень двойки, бóльшую первой.

Решение 2.

Ответ: нет.

Обозначим $\nu_p(x)$ степень вхождения простого p в разложение натурального x.

1 случай) Пусть $m+1 = p^k$, где p — простое (и $k \geq 1$).

Тогда если q — простое, $q \neq p$, то (поскольку $m+1$ не делится на q, имеем $\nu_q(S_{m+1}) = \nu_q(S_m)$). Также $\nu_p(S_{m+1}) = k$ и $\nu_p(S_m) = k-1$ (так как ни одно из чисел $1, 2, \ldots, m$ не делится на p^k, но среди них есть число, делящееся на p^{k-1}, например само p^{k-1}).

Итак, в первом случае $S_{m+1} = pS_m$.

2 случай) Пусть теперь $m+1$ не равно степени простого числа. Тогда пусть для фиксированного простого p выполнено $\nu_p(m+1) = t$. Тогда $m+1 > p^t$, поэтому среди чисел $1, 2, \ldots, m$ есть число, кратное p^t, например, само p^t. Значит, $\nu_p(S_m) \geq t = \nu_p(m+1)$. Значит, $\nu_p(S_{m+1}) = \nu_p(S_m)$.

Повторяя рассуждение для каждого простого p. получаем, что во втором случае $S_{m+1} = S_m$.

Из рассмотрения случаев 1 и 2 получается вывод: S_{m+1}/S_m может быть равно только простому числа или 1.

10 класс

10.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$? (*А. Кузнецов*)

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное. Пусть S_{m+1} делится на 2^s, но не делится на 2^{s+1}; тогда $s \geqslant 2$. Это значит, что среди чисел $1, 2, \ldots, m+1$ есть число a, делящееся на 2^s. Но тогда число $a/2$ уже не превосходит m и делится на 2^{s-1}; значит, и S_m делится на 2^{s-1}. Поэтому S_{m+1}/S_m не может делиться на степень двойки, бóльшую первой.

Замечание. Можно показать, что $S_{m+1} > S_m$ только тогда, когда число $m+1$ является степенью некоторого простого числа p; в этом случае отношение S_{m+1}/S_m будет равно p.

Комментарий. Заявлено, что S_{m+1}/S_m не может делиться на квадрат простого числа, но это утверждение не доказано или доказано неверно — 1 балл.

10.7. Петя взял некоторые трёхзначные натуральные числа $a_0, a_1, \ldots, a_9$ и написал на доске уравнение

$$a_9x^9 + a_8x^8 + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = *.$$

Докажите, что Вася сможет вместо звездочки написать некоторое 30-значное натуральное число так, чтобы получившееся уравнение имело целый корень. (*А. Кузнецов, А. Антропов*)

Решение. Пусть $\overline{x_iy_iz_i}$ — десятичная запись трехзначного числа a_i. Подстановка в левую часть уравнения $x = 1000$ даёт $a_9 \cdot 1000^9 + a_8 \cdot 1000^8 + \ldots + a_1 \cdot 1000 + a_0 = \overline{x_9y_9z_9\underbrace{0000\ldots0}_{27\text{ нулей}}} + \overline{x_8y_8z_8\underbrace{0\ldots0}_{24\text{ нуля}}} + \ldots + \overline{x_1y_1z_1000} + \overline{x_0y_0z_0} = \overline{x_9y_9z_9x_8y_8z_8\ldots x_0y_0z_0}$. Таким образом, после подстановки вместо звёздочки 30-значного числа $\overline{x_9y_9z_9x_8y_8z_8\ldots x_0y_0z_0}$ получится уравнение, имеющее корень 1000.

Комментарий. Заявлено, но не доказано, что при последовательной подстановке $x = 1, 2, 3, \ldots, k, k+1, \ldots$ значения левой части не «перепрыгнут» через 30-значные числа — 1 балл.

10.8. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. На стороне AB выбрана точка L так, что

$AL = CK$. Отрезки AK и CL пересекаются в точке M. На продолжении отрезка AD за точку D отмечена точка N. Известно, что четырёхугольник $ALMN$ — вписанный. Докажите, что $\angle CNL = 90°$. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Поскольку AM — биссектриса угла LAN, отрезки LM и MN равны как хорды, стягивающие равные дуги (см. рис. 3). Теперь достаточно доказать, что $CM = LM$ (тогда $CM = LM = MN$, значит, CNL — прямоугольный треугольник, и NM — его медиана, проведенная из прямого угла).

Так как $\angle BKA = \angle NAK = \angle BAK$, треугольник ABK — равнобедренный (симметричный относительно серединного перпендикуляра к AK). Отметим на стороне BK точку X так, что $LX \parallel AK$. Из симметрии треугольника ABK имеем $KX = AL$. Тогда имеем $KX = CK$ и $MK \parallel LX$, значит, MK — средняя линия треугольника CLX, значит, $CM = LM$, что завершает решение.

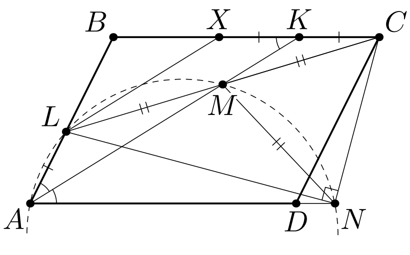

Рис. 3

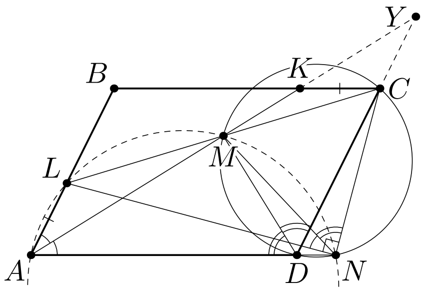

Рис. 4

Второе решение. Пусть $\angle BAD = 2\alpha$.

Заметим, что DM — биссектриса угла ADC. Действительно, продлим AK до пересечения с CD в точке Y (см. рис. 4). Тогда, используя подобия $AML \sim YMC$ и $AYD \sim KYC$, имеем $AM/MY = AL/YC = CK/YC = AD/DY$. Из полученного равенства $AM/MY = AD/DY$ вытекает, что DM — биссектриса треугольника ADY. Отсюда $\angle MDC = \angle ADC/2 = (180° - 2\alpha)/2 = 90° - \alpha$.

Из вписанности $ALMN$ имеем $\angle CMN = \angle LAD$, а из параллельности $AB \parallel CD$ следует $\angle LAD = \angle CDN$. Поэтому

$\angle CMN = \angle CDN$, значит, четырёхугольник $CMDN$ — вписанный. Отсюда $\angle MNC = \angle MDC = 90^\circ - \alpha$.

Из вписанности $\angle LNM = \angle LAM = \alpha$. Тогда $\angle LNC = \angle MNC + \angle LNM = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что в решении 2 при доказательстве того, что DM — биссектриса угла ADC, не использовалось то, что AM — биссектриса угла A. А при доказательстве вписанности $CMDN$ не использовалось также равенство $AL = CK$.

Комментарий. В случае, если задача не решена, оцениваются следующие продвижения. При этом баллы за продвижения суммируются, если их сумма не превосходит 3, иначе за все продвижения ставится 3 балла.

Доказано, что $LM = MN$ — 1 балл.

Доказано, что $LM = CM$ — 2 балла.

Доказано, что DM является биссектрисой угла ADC — 2 балла.

Доказано, что четырёхугольник $CMDN$ вписанный — 1 балл.

За другие начальные продвижения, например, за доказательство равнобедренности треугольника ABK или за равенство $\angle LNM = \angle LAM$, баллы не добавляются.

10.9. Дано натуральное число k. Вдоль дороги стоят n столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в k цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем n так могло оказаться? (*М. Тихомиров, Ф. Петров*)

Ответ. $3k - 1$.

Решение. Пронумеруем столбы от 1 до n вдоль дороги и примем за 1 расстояние между соседними столбами. Пару одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, будем называть *хорошей*.

Оценка. Пусть n столбов покрашены так, что условие задачи выполнено. Пусть n_i — количество столбов i-го цвета (далее считаем, что $n_i \geqslant 1$, т.е. все цвета присутствуют, иначе можно увеличить n, добавить столб нового цвета в конец). Пусть a_i и b_i — номера первого и последнего столбов i-го цвета.

Всего у нас есть $t = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_k - 1) = (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) - k = n - k$ хороших пар столбов. Поскольку все расстояния между столбами в хороших парах различны, наименьшее из этих расстояний не меньше 1, следующее — не меньше 2, и т.д. Так, для суммы S расстояний во всех хороших парах получаем оценку $S \geqslant 1 + 2 + \ldots + t = t(t + 1)/2$.

С другой стороны, сумма всех расстояний для i-го цвета равна $b_i - a_i$. Поэтому $S = (b_1 + \ldots + b_k) - (a_1 + \ldots + a_k)$. Сумма $b_1 + \ldots + b_k$ не превышает суммы k самых больших среди номеров $1, 2, \ldots, n$, а сумма $a_1 + \ldots + a_k$ не меньше, чем сумма k наименьших среди номеров $1, 2, \ldots, n$, поэтому $S \leqslant (n + (n - 1) + \ldots + (n - k + 1)) - (1 + 2 + \ldots + k) = k(n - k) = kt$.

Итак, $t(t+1)/2 \leqslant S \leqslant kt$, откуда $t \leqslant 2k-1$ и $n = k+t \leqslant 3k-1$.

Пример. Годится, например, покраска

$$1, 2, \ldots, k - 1, k, k, k - 1, \ldots, 2, 1, 2, 3, \ldots, k - 1, k.$$

Здесь для цвета 1 единственная хорошая пара, и расстояние между столбами в ней равно $2k - 1$. Для всех остальных цветов есть две хорошие пары, при этом для цвета 2 имеем расстояния $2k - 3$ и 2, для цвета 3 — расстояния $2k - 5$ и 4, и т.д., для цвета k — расстояния 1 и $2k - 2$.

Замечание. Существуют и другие, более сложные примеры. Например, можно первые k столбов покрасить в цвета $1, 2, \ldots, k$, а дальше столб с номером $k + s$, где $s = 2^p(2q - 1)$, окрасить в цвет q (скажем, для $k = 8$ покраска будет выглядеть так: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 3, 6, 2, 7, 4, 8$). Возможно индуктивное описание подходящих примеров.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

За решение задачи для конкретных небольших значений n без обобщения на произвольное n — баллы не начисляются.

За доказательство более слабой оценки или построения примера с $n < 3k - 1$ баллы не начисляются.

Если в решении (явно или неявно) предполагается, что все k цветов используются — баллы не снимаются.

Части «*оценка*»+«*пример*» оцениваются в 5+2 балла.

Оцениваются (и суммируются) следующие продвижения в части «оценка»:

(а) Найдено количество хороших пар столбов ($n-k$ в случае использования всех k цветов) — 1 балл.

(б) Доказана нижняя оценка $S \geqslant 1+2+\ldots+(n-k) = (n-k)(n-k+1)/2$ — 1 балл.

(в) Доказана верхняя оценка $S \leqslant k(n-k)$ — 2 балла.

Для получения 2 баллов за часть «пример» достаточно предъявить подходящую покраску и показать, что она подходит. В случае покраски из решения доказательство того, что она подходит, очевидно, за отсутствие объяснения, что она подходит, баллы не снижаются. В случае предъявления неочевидных верных примеров (как, например, в замечании), за отсутствие доказательства, что покраска подходит, снимается 1 балл.

10.10. Докажите, что для любых трёх положительных вещественных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x-y)\sqrt{3x^2+y^2}+(y-z)\sqrt{3y^2+z^2}+(z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geqslant 0.$$

(*П. Бибиков*)

Решение. Докажем, что $(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} \geqslant (x-y)(x+y) = x^2-y^2$. Если $x \geqslant y$, то $x-y \geqslant 0$ и $\sqrt{3x^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2+2xy+y^2} = x+y$. Если же $x \leqslant y$, то $x-y \leqslant 0$ и $\sqrt{3x^2+y^2} \leqslant \sqrt{x^2+2xy+y^2} = x+y$.

Складывая доказанное неравенство $(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} \geqslant x^2-y^2$ с аналогичными неравенствами $(y-z)\sqrt{3y^2+z^2} \geqslant y^2-z^2$ и $(z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geqslant z^2-x^2$, получаем требуемое.

Комментарий. Нужное неравенство выведено из неравенства $(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} \geqslant x^2-y^2$, которое не доказано или неверно доказано (например, доказано только при $x \geqslant y$) — 3 балла.