Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Заключительный этап – 2024 год
Первый (теоретический) тур

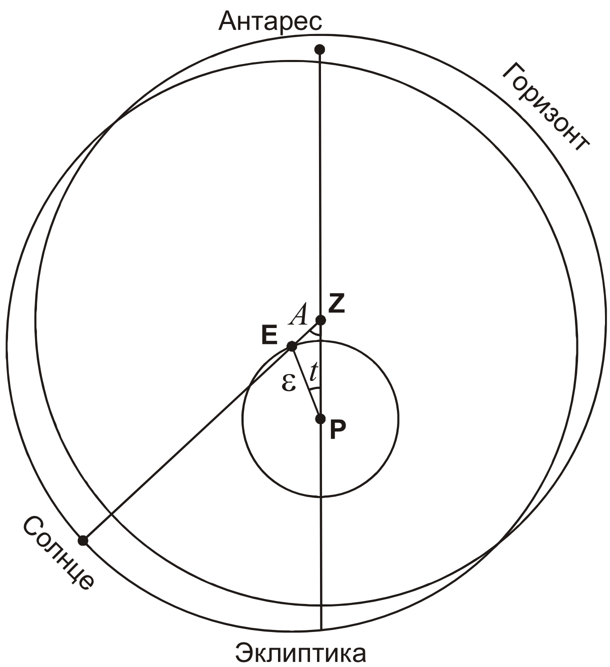
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

10.1. ЮЖНЫЙ СОПЕРНИК МАРСА *(О.С. Угольников)*

1. Условие. Звезда Антарес (α Скорпиона, α = 16ч30м, δ = –26°30′) едва поднимается над горизонтом в Санкт-Петербурге (широта ровно +60°) и видна там с большим трудом. Определите, в какой день года можно увидеть Антарес в верхней кульминации в Санкт-Петербурге на наиболее темном небе (Солнце глубже всего погружено под горизонт)? Орбиту Земли считать круговой.

1. Решение. Как мы видим, Антарес расположен в южном небесном полушарии вблизи эклиптики, не так далеко от точки зимнего солнцестояния. Трудность наблюдения Антареса в высоких северных широтах заключается не только в его низком положении на небе, но и в значительной засветке неба, что существенно усложняет наблюдения у горизонта. Антарес кульминирует вблизи полуночи в конце весны – начале лета, но в это время в Петербурге уже наступают белые ночи. В любой сезон года, когда Антарес кульминирует, эклиптика располагается на небе недалеко от горизонта, и картина имеет место либо днем, либо в сумерки. Определим, в каком положении на эклиптике Солнце окажется глубже всего под горизонтом.

Рассмотрим ситуацию со стороны зенита в момент, когда Антарес оказывается в кульминации. Для удобства воспользуемся проекцией, при которой зенитное расстояние на небе пропорционально расстоянию от зенита на рисунке. Вблизи зенита эта проекция будет отображать небо так же, как и проекция на горизонтальную плоскость.



Пусть **Z** – точка зенита, **P** – северный полюс мира. Угловое расстояние между ними **ZP** равно 90° – φ, то есть 30°. Точка **E** – северный полюс эклиптики. Его прямое восхождение равно 18 часам, и он не дошел до верхней кульминации на угол t (равный его часовому углу со знаком минус), 1ч30м или 22.5°. Определим угловое расстояние между зенитом и полюсом эклиптики, считая картину плоской:

$$EZ = \sqrt{ZP^2 + EP^2 - 2ZP \cdot EP \cdot \cos t} = 12.3^{\circ}.$$

Здесь мы учли, что отрезок EP есть угол наклона экватора к эклиптике, 23.4°. На самом деле, EZ есть максимальное погружение Солнца под горизонт во время кульминации Антареса, мы видим, что в самом лучшем случае этот момент оказывается на грани навигационных сумерек. Теперь мы можем найти угол A с вершиной в зените между направлениями на полюс мира и оптимальное положение Солнца:

$$\sin A = \sin t \frac{EP}{EZ}; \quad A = 47^{\circ}.$$

Учитывая близость горизонта к эклиптике, можно просто считать, что Солнце не дошло в своем пути по эклиптике 47° (что соответствует 48 дням) до момента противостояния Антареса. Само противостояние наступает за 3/4 месяца до летнего солнцестояния, то есть 30 мая. Итак, оптимальные условия для наблюдения Антареса в верхней кульминации в Петербурге наступают перед рассветом 12 апреля. Интересно, что несмотря на существенные приближения, наша погрешность составляет всего 1 день, точный ответ – 13 апреля.

1. Система оценивания. Задача может быть решена разными способами. Наиболее точный, но при этом излишне сложный для подобной задачи – сферическая тригонометрия. Приближенные способы характеризуются разной степенью погрешности, которую нужно оценить при проверке. Решения с погрешностью в несколько дней могут быть оценены полностью при условии достаточного описания. Система оценивания включает в себя проверку основных фактов:

Этап 1 – 3 балла. Описание положения эклиптики на небе в момент верхней кульминации Антареса. Оно может быть сделано через положение полюса эклиптики относительно зенита (как сделано выше), либо через положения самой высокой и самой низкой точки эклиптики.

Этап 2 – 3 балла. Оценка положения Солнца на эклиптике в требуемый момент. Положение Солнца может быть определено относительно точки с эклиптической долготой Антареса либо противоположной точки (как сделано выше), точность – 2°.

Этап 3 – 4 балла. Ответ. Этап оценивается полностью при ответе от 10 до 14 апреля, далее оценка уменьшается на 1 балл за каждые дополнительные 4 дня погрешности.

Пример неверного решения задачи: предположение, что картина должна наблюдаться в солнечную полночь, что ведет нас к ответу около 30 мая. Максимальная оценка за все решение – 2 балла при условии указания именно этой даты с точностью в 3 дня.

Пример неточного решения задачи: предположение, что все 1.5 звездных часа до своей предстоящей кульминации полюс эклиптики движется точно с востока на запад. Его перемещение составляет $t \sin \varepsilon = 8.9°$. Угол A в этом случае есть arctan (8.9/6.6) = 53°, ответ – примерно 6 апреля. Если других упрощений и ошибок не сделано, первый этап оценивается полностью, второй – в 2 балла, третий – в 3 балла. Общая оценка – 8 баллов.

Максимальная оценка за все решение – 10 баллов.

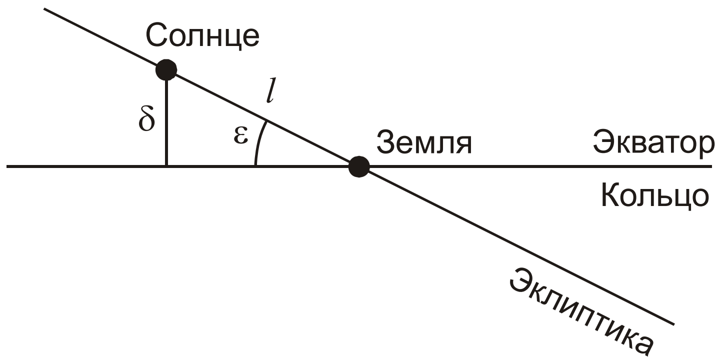
10.2. ОСТАЛАСЬ ЛИШЬ ТЕНЬ… *(О.С. Угольников)*

2. Условие. Известно, что иногда кольца Сатурна при наблюдении с Земли «исчезают», так как обращаются к нам ребром. Ближайший раз это произойдет в 2025 году. Определите максимально возможную угловую толщину полоски тени от колец на поверхности Сатурна при наблюдении с Земли, когда наша планета находится точно в плоскости колец, она же – плоскость экватора Сатурна. Считать Солнце и Землю точечными объектами, орбиты Земли и Сатурна – круговыми и лежащими в плоскости эклиптики. Кольцо Сатурна считать сплошным с внутренним радиусом 92 тысячи км, внешним радиусом 137 тысяч км и толщиной ровно 1 км.

2. Решение. Кольцо Сатурна очень тонкое и расположено в плоскости экватора этой планеты. Если мы введем систему небесных координат на Сатурне аналогично той, что мы используем на Земле, то в описанный в условии задачи момент склонение Земли равно нулю. Для Сатурна Земля – внутренняя планета, не уходящая на небе далеко от Солнца. Если в данный момент склонение Солнца тоже оказалось бы нулевым, то в рамках условия задания тень имела бы пространственную толщину 1 км, что с расстояния Земли соответствовало бы углу всего в 0.00015″, что совершенно невозможно было бы увидеть. Даже с учетом реальных размеров Солнца тень бы просто не появилась. Тем не менее, она часто оказывается заметной. Это связано с тем, что склонение Солнца в этот момент может быть отлично от нуля, и тогда оно не будет находиться в плоскости кольца и может дать эффект тени ощутимой толщины.

По условию задачи, мы пренебрегаем углом наклона орбиты Сатурна к плоскости орбиты Земли. В реальности этот угол равен 2.5°, что может показаться большим. Но Земля, расположенная примерно в 10 раз ближе к Солнцу, чем Сатурн, будет отклоняться от «сатурнианской» эклиптики в его небе всего на 0.25°, что не является основным фактором. Главным будет различие склонений Земли и Солнца за счет их разного положения на самой эклиптике Сатурна. Обратим внимание, что наклон экватора Сатурна к плоскости его орбиты $\varepsilon = 26.73°$ значителен и превышает аналогичный угол для Земли.

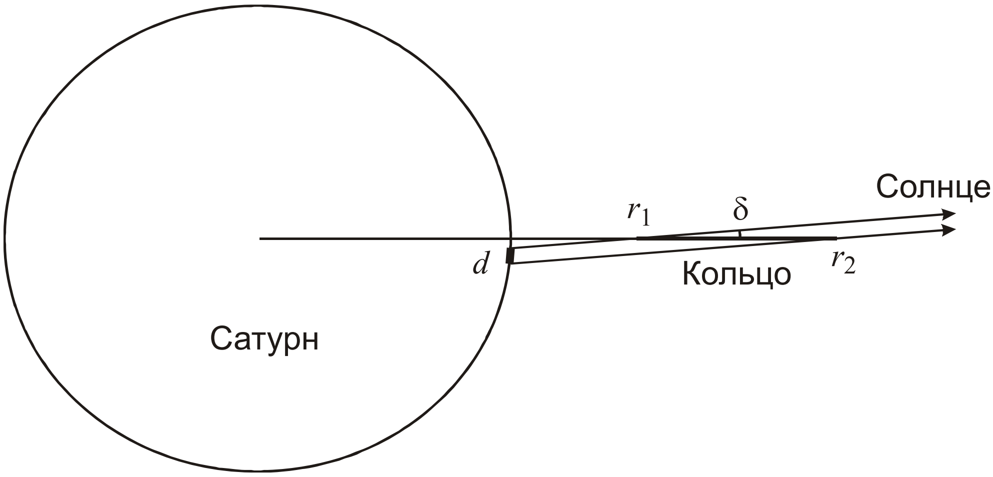
Очевидно, в случае совпадения плоскостей орбит максимальная разность склонений будет достигаться, если Земля в небе Сатурна находится в наибольшей элонгации, а Сатурн в небе Земли – в квадратуре. Максимальное угловое расстояние между Землей и Солнцем составляет



$$l = \arcsin(a_0/a) = 6.0°,$$

где a_0 и a – радиусы орбит Земли и Сатурна. Тогда модуль склонения Солнца может быть равен

$$\delta = l \sin\varepsilon = \arcsin(a_0/a)\sin\varepsilon = 2.7°.$$



В этом случае кольцо отбросит на поверхность Сатурна тень шириной

$$d = (r_2 - r_1) \sin \delta \approx 2120 \text{ км}.$$

В момент квадратуры расстояние между Землей и Сатурном равно

$$L = \sqrt{a^2 - a_0^2} = 9.486 \text{ а.е.} = 1.419 \cdot 10^9 \text{ км}.$$

Угловая ширина полосы тени равна

$$s = 206265'' \cdot (d/L) = 0.31''.$$

2. Система оценивания.

1 этап – 3 балла. Правильное представление, за счет чего тень колец на Сатурне в указанный момент может стать видимой и иметь заметную толщину. Должно быть четко указано, что это может быть при максимальном угловом удалении Земли от Солнца в небе Сатурна (наибольшая элонгация Земли на Сатурне и/или квадратура Сатурна на Земле).

Возможная ошибка при выполнении решения: указание угла наклона орбиты Сатурна к плоскости эклиптики (около 2.5°) как основного фактора. Если эта величина напрямую приравнивается к склонению Солнца на Сатурне, то в итоге участник может прийти к ответу, близкому к правильному. Однако, в реальности влияние этого эффекта на склонение Солнца в 10 раз меньше, более того, в условии указано, что этот эффект рассматривать не нужно.

Если участник рассматривает только его без учета смещения Солнца от Земли вдоль «эклиптики» Сатурна, то ему полностью не засчитывается как этот этап, так и два последующих. Если фактор смещения Солнца вдоль эклиптики также учтен, а фактор наклона завышен в 10 раз, то это дает вдвое больший итоговый ответ. В этом случае первый этап решения не засчитывается (0 баллов), остальные оцениваются, исходя из их выполнения, с учетом других ответов, которые должны быть получены. Наконец, если фактор наклона орбит учтен в правильном масштабе, что приводит к увеличению итогового ответа на 10% – оценка за 1 этап уменьшается на 1 балл, так как в условии в явном виде сказано, что этот эффект не должен учитываться.

Этап 2 – 2 балла. Определение максимально возможного углового расстояния между Солнцем и Землей в небе Сатурна, точность 0.2°. Численная оценка углового расстояния может не делаться, полученное для него соотношение переводится сразу в следующий этап решения, что также допустимо и оценивается полностью в случае правильной формулы для данной величины.

Этап 3 – 1 балл. Нахождение максимального модуля склонения Солнца, точность 0.1°. Аналогично предыдущему этапу, данный может быть выполнен численно или в виде формулы, которая используется на следующих этапах.

Возможная ошибка при решении: использование неверного значения угла ε (например, взятие величины для Земли). Этап не засчитывается, остальные оцениваются, исходя из их выполнения.

Этап 4 – 2 балла. Определение пространственной ширины полосы тени, точность 50 км.

Возможная ошибка при решении: использование внешнего радиуса кольца Сатурна вместо разности внешнего и внутреннего радиуса, то есть фактически предположение, что кольцо Сатурна начинается с его поверхности. Этап не засчитывается полностью, без влияния на последующий этап.

Этап 5 – 2 балла. Определение угловой ширины полосы тени, точность 0.02″. Ответ 0.3″ считается правильным.

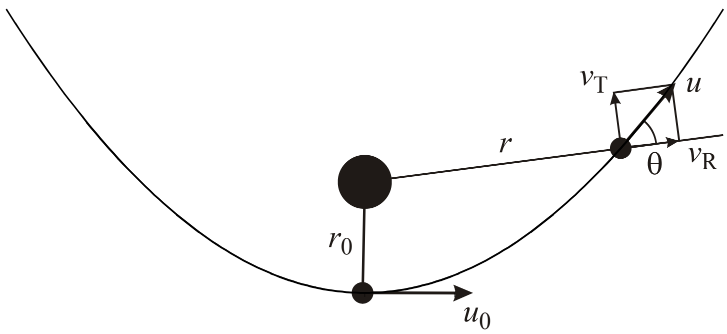
Вероятная ошибка: расстояние от Земли до Сатурна берется не для квадратуры, а для другой конфигурации (например, противостояния). Эффект изменяет итоговый ответ примерно на 5% и может вывести его за рамки требуемой точности. Оценка уменьшается на 1 балл.

10.3. МИМОЛЕТНОЕ СВИДАНИЕ *(О.С. Угольников)*

3. Условие. Небольшой астероид пролетает около некоторой планеты, двигаясь относительно нее по параболической траектории. Когда расстояние между планетой и астероидом было минимальным, на планете измерили угловую скорость астероида, она оказалась равной ω_0. Через некоторое время угловая скорость астероида составила $\omega_0/2$, а лучевая скорость оказалась равной v. Какой станет лучевая скорость астероида, когда его угловая скорость будет равна $\omega_0/4$? Размерами планеты и действием на астероид других тел, кроме планеты, пренебречь, планета не вращается вокруг своей оси.

3. Решение. Обозначим минимальное расстояние между планетой и астероидом как r_0, а его пространственную скорость относительно планеты – u_0. В этот момент астероид движется перпендикулярно направлению на планету, поэтому его угловая скорость есть $\omega_0 = u_0/r_0$. Далее астероид удаляется от планеты. Пусть в некоторый момент его расстояние от планеты есть r, а скорость равна u. Так как орбита параболическая, полная энергия астероида в оба момента равна нулю, то есть

$$\frac{u_0^2}{2} = \frac{GM}{r_0}; \quad \frac{u^2}{2} = \frac{GM}{r}; \quad u = u_0\sqrt{\frac{r_0}{r}}.$$



Помимо этого, в системе сохраняется момент импульса (что эквивалентно II закону Кеплера). В расчете на единицу массы астероида он равен произведению расстояния на тангенциальную компоненту скорости:

$$r_0 \cdot u_0 = r \cdot v_T = r \cdot u \cdot \sin\theta,$$

где θ – угол между направлением с планеты на астероид и направлением скорости астероида. Угловая скорость астероида при наблюдении с планеты будет равна

$$\omega = \frac{v_T}{r} = \frac{r_0 u_0}{r^2} = \omega_0 \frac{r_0^2}{r^2}.$$

Отсюда мы также имеем выражение для угла θ:

$$\sin\theta = \frac{r_0 \cdot u_0}{r \cdot u} = \sqrt{\frac{r_0}{r}}.$$

В последнем равенстве мы использовали записанный ранее закон сохранения энергии. Лучевая скорость составит

$$v_R = u \cdot \cos\theta = \frac{u_0 \cdot r_0 \cdot \cos\theta}{r \cdot \sin\theta} = \frac{u_0 \cdot r_0}{\sqrt{r_0 \cdot r}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} = u_0 \frac{\sqrt{r_0 \cdot (r - r_0)}}{r}.$$

В момент, описанный в условии задачи, угловая скорость $\omega_1 = \omega_0/2$, из чего мы получаем расстояние и лучевую скорость:

$$r_1 = r_0 \cdot \sqrt{2}; \quad v = u_0 \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}.$$

Когда угловая скорость станет равной $\omega_2 = \omega_0/4$, мы получим:

$$r_2 = r_0 \cdot 2; \quad v_2 = \frac{1}{2} u_0.$$

В итоге, лучевая скорость астероида будет равна

$$v_2 = v \sqrt{\frac{1}{2 \cdot (\sqrt{2} - 1)}} = v \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} \approx 1.10 \cdot v.$$

Можно заметить, что это будет максимальная лучевая скорость для этого астероида, с его дальнейшим удалением от планеты она начнет уменьшаться.

3. Система оценивания. При проверке решений необходимо иметь ввиду, что построение решения участником может существенно отличаться от приведенного выше. Оценка должна определяться правильным применением основных законов и соотношений между величинами. Задание не предусматривает численный счет, и все этапы засчитываются только при точной записи тех или иных соотношений, которые должен получить участник. Оценка является суммой двух основных составляющих – качество решения и ответа. Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 10 баллов.

Часть 1 – качество решения (6 баллов)

1 этап – 1 балл. Использование закона сохранения энергии для движения астероида, которое может быть сделано в явном виде или правильно использоваться в выкладках. Результатом этапа должно быть соотношение полной скорости астероида и его расстояния от планеты.

2 этап – 1 балл. Использование закона сохранения момента импульса для движения астероида, которое может быть сделано в явном виде или правильно использоваться в выкладках. Результатом этапа должно быть соотношение тангенциальной скорости астероида и его расстояния от планеты.

3 этап – 1 балл. Получение выражения видимой угловой скорости астероида в зависимости от какого-либо одного параметра (расстояния, скорости, …), характеризующего положение астероида на орбите. Этап оказывается автоматически выполненным, если выражение для закона сохранения момента импульса (предыдущий этап) записывается сразу для расстояния и угловой скорости, тогда оба этапа сразу оцениваются полностью.

4 этап – 1 балл. Связь угла θ либо иной однозначно связанной с ним величины с расстоянием астероида от планеты.

5 этап – 2 балла. Связь лучевой скорости астероида с его расстоянием от планеты либо другим параметром, однозначно характеризующим положение астероида на орбите.

Часть 2 – Качество ответа (4 балла).

0 баллов: ответ отсутствует либо не имеет размерности скорости.

1 балл: ответ имеет размерность скорости, но не имеет формы произведения скорости v на какой-либо численный коэффициент. Так же ситуация, если ответ содержит величину ω_0 либо какие-то иные величины, не заданные в условии.

2 балла: ответ имеет правильную форму, но численный коэффициент либо отрицательный и не равный верному по модулю, либо положительный и отличается от верного в большую или меньшую сторону в $\sqrt{2}\sim 1.4$ раза или более.

3 балла: ответ имеет правильную форму, и отличается от верного в большую и меньшую сторону менее чем в $\sqrt{2}\sim 1.4$ раза. Та же оценка ставится, если ответ правильный по модулю, но имеет отрицательный знак.

4 балла: в точности верный ответ. Необходимо учесть, что коэффициент может быть записан в иной эквивалентной форме. Приближение $1.10\cdot v$ не является обязательным для записи.

10/11.4. ТОНКИЙ БАЛАНС *(О.С. Угольников)*

4. Условие. Слабо пульсирующая переменная звезда изменяет свою звездную величину по синусоидальному закону с периодом τ, разница болометрических звездных величин в минимуме и максимуме равна Δm. Черная теплопроводная сферическая пылинка радиусом r и плотностью ρ находится вдали от поверхности звезды. Она не вращается вокруг звезды, а лишь совершает колебательные движения вдоль направления на звезду, при этом ее средние за период колебаний расстояние до звезды R и температура T остаются постоянными. Определите длину отрезка, который описывает пылинка в ходе колебаний. Считать величину изменений блеска Δm и период колебаний τ малыми (Δm<<1, период много меньше орбитального периода, соответствующего расстоянию R). Пылинка взаимодействует с излучением по законам геометрической оптики.

4. Решение. На пылинку действуют две силы: притяжение со стороны звезды и давление ее излучения. Запишем выражения для этих сил для произвольного расстояния от звезды L:

$$F_{\mathrm{G}} = \frac{4\pi GM\rho r^3}{3L^2}; \quad F_{\mathrm{E}} = \frac{J\cdot\pi r^2}{4\pi cL^2} = \frac{J\cdot r^2}{4cL^2}.$$

Здесь M – масса звезды, которая нам неизвестна. Во втором случае мы учли, что сила давления излучения есть плотность потока энергии, деленная на скорость света. Так как пылинка черная, это излучение не отражается напрямую, а собственное тепловое излучение теплопроводной пылинки изотропно и не влияет на ее движение. Обе силы убывают обратно пропорционально квадрату расстояния до звезды, их соотношение не меняется с расстоянием. Пылинка находится вблизи положения равновесия, то есть средние значения этих сил за период колебаний совпадают:

$$\frac{4\pi GM\rho r^3}{3} = \frac{J_0\cdot r^2}{4c},$$

и для средней за период светимости мы имеем:

$$J_0 = \frac{16\pi cGM\rho r}{3}.$$

Звездная величина (абсолютная или видимая на фиксированном расстоянии) звезды меняется со временем следующим образом:

$$m = m_0 + \frac{\Delta m}{2}\cdot\sin\frac{2\pi t}{\tau}.$$

По условию задачи величина Δm мала, поэтому мы можем записать выражение для изменения светимости звезды:

$$J = const\cdot 10^{-0.4m} = J_0\cdot 10^{-0.4\frac{\Delta m}{2}\cdot\sin\frac{2\pi t}{\tau}} \approx J_0\cdot\left(1 - \frac{\ln 10}{5}\Delta m\cdot\sin\frac{2\pi t}{\tau}\right).$$

Равнодействующая двух сил составит:

$$F = F_{\text{E}} - F_{\text{G}} = \frac{J \cdot r^2}{4cL^2} - \frac{4\pi GM\rho r^3}{3L^2} = \frac{J_0 \cdot r^2}{4cL^2} + \frac{\ln 10}{5}\frac{J_0 \cdot r^2 \Delta m}{4cL^2}\sin\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{4\pi GM\rho r^3}{3L^2}.$$

Первое и третье слагаемое компенсируют друг друга, и в итоге:

$$F = \frac{\ln 10}{5}\frac{J_0 \cdot r^2 \Delta m}{4cL^2}\sin\frac{2\pi t}{\tau}.$$

Период колебаний и разность звездных величин Δm малы, и пылинка не успевает существенно изменить свое расстояние до звезды. Поэтому мы можем считать, что в этой формуле $L \approx R$, и пылинка движется под действием гармонической силы. Но нам неизвестна величина J_0. Чтобы определить ее, запишем уравнение теплового баланса для пылинки:

$$\frac{J_0}{4\pi R^2} \cdot \pi r^2 = 4\pi\sigma r^2 T^4; \quad \frac{J_0}{4R^2} = 4\pi\sigma T^4.$$

Подставим последнее выражение в формулу для равнодействующей силы с учетом $L=R$:

$$F = \frac{\ln 10}{5} \cdot \frac{4\pi\sigma T^4 \cdot r^2 \Delta m}{c}\sin\frac{2\pi t}{\tau}.$$

Ускорение пылинки под действием этой силы составит

$$a = \frac{3F}{4\pi\rho r^3} = \frac{\ln 10}{5} \cdot \frac{3\,\sigma T^4 \cdot \Delta m}{c\rho\, r}\sin\frac{2\pi t}{\tau} = a_0 \sin\omega t.$$

Угловая скорость, соответствующая колебаниям, есть $\omega = 2\pi/\tau$. Искомая длина отрезка есть удвоенная амплитуда колебаний:

$$d = \frac{2a_0}{\omega^2} = \frac{\ln 10}{5} \cdot \frac{6\sigma T^4 \cdot \Delta m \tau^2}{4\pi^2 c\rho r} = \frac{3\ln 10 \cdot \Delta m}{10\pi^2} \cdot \frac{\sigma T^4 \cdot \tau^2}{c\rho r}.$$

Обратим внимание, что в итоговое выражение не входит расстояние от пылинки до звезды R.

4. Система оценивания. Оценка является суммой двух основных составляющих – качество решения и ответа. Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 10 баллов.

Часть 1 – Качество решения (5 баллов).

<u>Этап 1 – 1 балл.</u> Правильное выражение для средней силы светового давления, действующей на пылинку (на расстоянии R)

<u>Этап 2 – 1 балл.</u> Правильная связь выражения силы светового давления через температуру пылинки, при которой исчезает зависимость от расстояния до звезды R.

<u>Этап 3 – 1 балл.</u> Выражение для изменения светового потока от звезды как функции времени.

Этап 4 – 1 балл. Выражение для равнодействующей сил светового давления и притяжения к звезде, которая оказывается синусоидальной функцией времени и определяется только заданными в условии величинами.

Этап 5 – 1 балл. Выражение для длины отрезка как удвоенной амплитуды гармонических колебаний пылинки под действуем синусоидальной силы.

Часть 2 – Качество ответа (5 баллов).

0 баллов: ответ отсутствует, либо размерность выражения ответа не соответствует искомой величине (длина отрезка), вне зависимости от вызвавшей это ошибки. То же относится к случаю, если в выражении ответа производится сложение или вычитание величин разных размерностей.

1 балл: ответ записан и соответствует требуемой размерности. Однако его отношение к правильному ответу является безразмерной комбинацией размерных параметров, заданных в условии (например, отношение ответов равно r/R, $r/c\tau$ или Δm в ненулевой степени). То же относится к любому варианту, если ответ содержит величину R или величину, не заданную в условии задания (например, массу звезды M).

2 балла: ответ записан, соответствует требуемой размерности, все размерные величины и величина Δm присутствуют в нем в правильной степени. Численный коэффициент отличается от верного в большую или меньшую сторону более чем в 4 раза.

3 балла: ответ записан, соответствует требуемой размерности, все размерные величины присутствуют в нем в правильной степени. Численный коэффициент отличается от верного в большую и меньшую сторону не более чем в 4 раза.

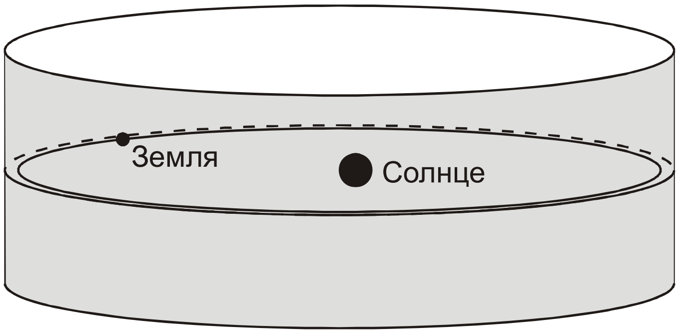
4 балла: ответ записан, соответствует требуемой размерности. Он может быть сведен к правильному при корректном учете всех упрощений, сделанных в условии задачи. В ответе могут присутствовать лишние факторы и слагаемые, которые исчезают при правильных преобразованиях и использовании допущений. К этому же случаю относится запись ответа с не заданными в условии величинами (например, частота колебаний ω), которые описываются в отдельных формулах (неоптимальная запись ответа).

5 баллов: ответ полностью соответствует верному, либо получается из него путем элементарных однозначных преобразований (без учета допущений).

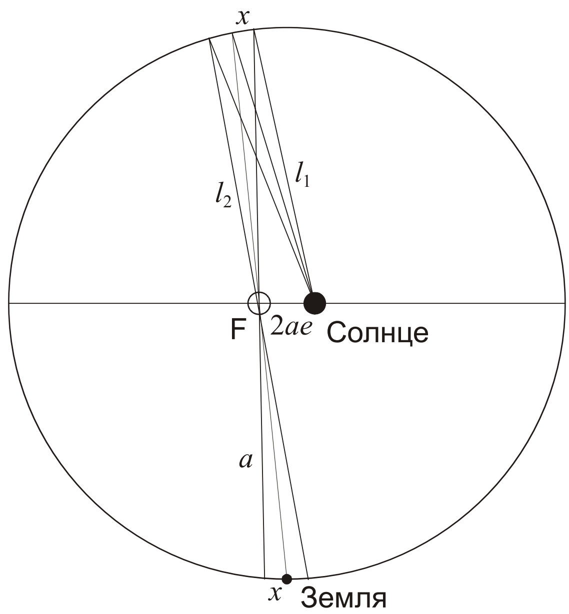
10.5. В ПОГОНЕ ЗА СВЕТОМ *(О.С. Угольников)*

5. Условие. Желая сберечь солнечный свет, жители Земли осуществили грандиозный проект: растянули непосредственно за земной орбитой лист идеально отражающей фольги шириной существенно больше диаметра Солнца. Средняя линия листа повторяла форму орбиты Земли, в каждой точке лист располагался перпендикулярно плоскости орбиты (см. рисунок). Нарисуйте в масштабе взаимное расположение Солнца и его отражения от участка фольги позади Солнца в небе Земли в момент, когда они будут находиться максимально далеко друг от друга на небе. Укажите численные значения параметров (угловых размеров, расстояний), характеризующих это расположение. Определите видимую звездную величину данного отражения Солнца на Земле.

При решении считать, что ситуация имеет место вскоре после запуска проекта, и он еще не привел к изменению физических характеристик тел Солнечной системы. Фольга не изменяет своей формы, свойств и положения в пространстве под действием излучения или притяжения расположенных рядом физических тел, в том числе Солнца и Земли.



5. Решение. Если бы орбита Земли была круговой – отражение Солнца было бы расположено в точности за ним и не могло бы наблюдаться. Но орбита Земли имеет небольшой эксцентриситет e. Рассмотрим лучи света, идущие от Солнца в плоскости орбиты Земли.



Проекция экрана из фольги на картинную плоскость есть эллипс, практически совпадающий с земной орбитой. По оптическим свойствам эллипса, лучи, исходящие из одного из его фокусов, где находится Солнце, собираются в другом фокусе. Поэтому в любой момент времени отражение света Солнца будет видно на Земле в направлении второго фокуса эллипса F. Тогда становится очевидным, когда это отражение будет максимально удалено от самого Солнца на небе.

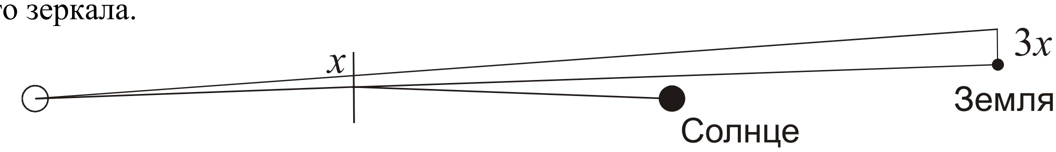
Это произойдет, когда Земля окажется на малой оси эллипса. Расстояние от Земли до Солнца в этот момент будет равно большой полуоси эллипса a, а угловое расстояние между центрами Солнца и его отражения составит

$$\alpha = 2\arcsin\frac{ae}{a} \approx 2e = 0.0334 \text{ рад} = 114.8'.$$

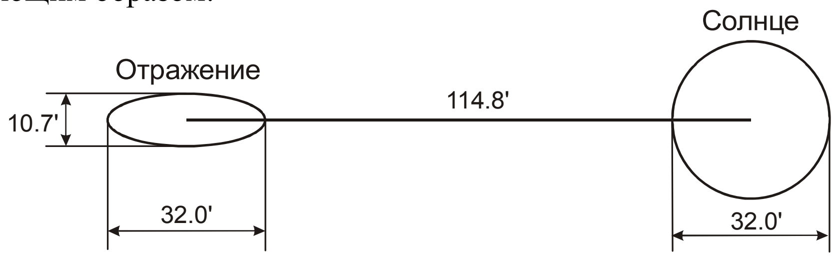
Эта величина существенно превосходит видимый радиус Солнца, и его отражение будет видно на небе. Далее обратим внимание, что эксцентриситет орбиты Земли очень мал, и расстояния от двух фокусов до точки отражения l_1 и l_2 можно считать одинаковыми (в реальности, они будут отличаться в $1+4e^2 = 1.001$ раз, и мы можем пренебречь этим). Поэтому изображение Солнца, построенное во втором фокусе, будет иметь тот же горизонтальный размер, что и само Солнце. Расстояние от этого изображения до Земли также равно 1 а.е. с точностью до фактора порядка e^2, в итоге горизонтальный угловой диаметр изображения d_A будет таким же, как у самого Солнца в этот момент – 32.0′.

Заметим также, что лучи, вышедшие из центра Солнца и разошедшиеся при отражении на расстояние x, сойдутся во втором фокусе и разойдутся практически на то же расстояние вблизи Земли. Таким образом, плотность лучей вдоль горизонтальной линии от отражения будет такой же, как от самого Солнца. Мы учтем это далее при расчете звездной величины отражения.

Рассмотрим теперь картину в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты. Лучи Солнца, идущие от него в этой плоскости, будут отражаться от фольги, как от плоского зеркала.



Картина будет эквивалентна изображению Солнца, расположенного в 1 а.е. за экраном, то есть в 3 а.е. от Земли. Вертикальный размер изображения будет равен $d_B = d_A/3 = 10.7'$. Отражение будет представлять собой эллипс с отношением осей 1:3, картина будет выглядеть следующим образом:



Заметим также, что лучи из центра Солнца, разошедшиеся на то же расстояние x вблизи экрана, удалятся друг от друга на $3x$ около Земли. В итоге, плотность потока энергии уменьшится в 3 раза, так же, как и видимая площадь отражения по сравнению с самим Солнцем. Поверхностная яркость Солнца и отражения будут одинаковыми, что имеет место при идеальных зеркалах любой формы и отсутствии поглощения света. Звездная величина отражения составит

$$m = m_0 + 2.5 \lg 3 = –25.6.$$

Здесь m_0 – видимая звездная величина Солнца. Завершив решение задания, мы можем представить, к чему может привести такой эксперимент, если бы он был вдруг реализован. Интересно, что рассмотренное в задачи первое отражение Солнца стало бы единственным, почти все время видимым на Земле, кроме коротких отрезков вблизи перигелия и афелия. Участок экрана, расположенный за Землей, будет частично закрыт от излучения Солнца самой нашей планетой, а лучи Солнца, проходящие мимо Земли, отражались бы в сторону от нас. Лишь вблизи того же положения Земли на малой оси эллипса изображение Солнца у горизонта могло бы наблюдаться в противоположной области неба, причем на его свойствах могла бы существенно сказываться атмосфера Земли.

После второго отражения от фольги свет вернется к фокусу эллипса, в котором находится Солнце. Таким образом, практически вся солнечная энергия, испущенная Солнцем вдоль плоскости эклиптики, дважды отразившись от экрана, возвращалась бы на Солнце. Добавим, что подобный эксперимент может вызвать драматические последствия на Земле, которая станет получать примерно на 1/3 часть больше солнечной энергии. Это увеличит ее среднюю температуру примерно на 20 градусов.

5. Система оценивания.

Этап 1 – 2 балла. Определение максимального расстояния между центрами Солнца и его отражения. Высокая точность численного значения не предполагается (достаточно 10% точности), главное условие зачета этапа – выражение, что этот угол равен $2e$ в радианной мере. Численно данное значение может даже не определяться, если вместо него в дальнейшем будет указано расстояние между ближайшими точками диска Солнца и отражения (около 83′).

Если участник неверно определяет конфигурацию Земли на орбите, при которой угловое расстояние между Солнцем и отражением максимально – данный этап не оценивается. Однако, ввиду малости эксцентриситета орбиты Земли, эта ошибка в дальнейшем влияет только на угловое расстояние между объектами, но практически не сказывается на свойствах самого отражения. Поэтому этапы 2, 3 и 5 оцениваются также, по их выполнению, а этап 4 оценивается из 1 балла при условии соответствии рисунка картине, полученной участником.

Этап 2 – 2 балла. Определение углового размера горизонтальной оси отражения, точность 1′. При верном выполнении первого этапа решения будет достаточно показать, что этот размер совпадает со средним видимым диаметром Солнца, хотя участник может уточнить его и показать, что он будет меньше в $1+4e^2 = 1.001$ раз, и это не влияет на оценку. Если же угловой размер оказывается равным угловому размеру Солнца в перигелии либо афелии – оценка снижается на 1 балл.

Этап 3 – 2 балла. Определение углового размера вертикальной оси отражения, точность 1′. Достаточно показать, что он будет втрое меньше среднего углового диаметра Солнца (если используется максимальный либо минимальный диаметр – оценка снижается на 1 балл).

Этап 4 – 2 балла. Выполнение рисунка. На нем должны быть указан набор параметров, которые однозначно определяют всю картину (например, угловой радиус или диаметр Солнца, большая и малая оси или полуоси эллипса отражения, расстояние между центрами или краями Солнца и отражения). Относительная точность выполнения рисунка должна составлять не менее 5% (отношения размеров деталей к их истинному размеру должны совпадать в рамках данной точности).

Этап 5 – 2 балла. Определение видимой звездной величины отражения, точность 0.1^m.

Вероятная ошибка при выполнении задания. Неверное определение формы и угловых размеров отражения Солнца, например, оно предполагается кругом того или иного радиуса. В этом случае не засчитываются этапы 2 или 3, в зависимости от того, какая из осей определена неверно. Этапы 4 и 5 оцениваются только по 1 баллу. Рисунок при этом должен соответствовать той картине отражения, которую получил участник. Если отражение Солнца у него получается круглой формы – достаточно указания его радиуса вместо двух осей эллипса. 1 балл за этап 5 (определение звездной величины) ставится только в том случае, если отражение Солнца оказалось во столько же раз слабее самого Солнца, во сколько раз уменьшилась его видимая площадь по сравнению с Солнцем.

10.6. СИНХРОЗАТМЕНИЕ

(В.Б. Игнатьев / О.С. Угольников)

6. Условие. Как известно, Луна удаляется от Земли в среднем на 3.8 см в год. Из-за этого в какую-то эпоху в будущем может сложиться интересная ситуация: строго через каждый драконический год (период возвращения Солнца к одному определенному узлу лунной орбиты на небе) будет происходить центральное солнечное затмение, видимое на Земле в зените.

1) Определите, когда такое впервые может случиться в будущем;
2) Для этого момента найдите наибольшую фазу данного центрального затмения;
3) Определите, сколько других солнечных затмений будет наблюдаться в течение драконического года между этими центральными затмениями, и какие у них будут наибольшие фазы.

Орбиты Земли и Луны считать круговыми, удаление Луны от Земли – равномерным, наклон ее орбиты к эклиптике, расстояние Земли от Солнца, а также радиусы Солнца, Земли и Луны – постоянными. Угловая скорость движения узлов лунной орбиты равна $\omega_N = -C \cdot \Omega^2/\omega$, где Ω и ω – угловые скорости орбитального движения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли соответственно, а C – постоянная величина.

6. Решение. Для начала определим численное значение константы C из выражения, заданного в условии задачи. Учтем при этом, что период некоторого вращения равен 2π, деленное на модуль угловой скорости этого вращения. Знак минус в выражении в условии говорит о том, что узлы лунной орбиты двигаются с востока на запад, навстречу движению Луны и Солнца на небе. Константа C положительна и равна:

$$C = \left|\frac{\omega_N \omega}{\Omega^2}\right| = \frac{T^2}{t_{N0} t_0} = 0.718.$$

Здесь мы воспользовались современными значениями периода вращения Луны вокруг Земли t_0 (0.0748 года) и периода вращения лунных узлов t_{N0} (18.6 лет). T – период обращения Земли вокруг Солнца. Определим длительности драконического года (периода между прохождениями Солнца одного узла орбиты) и драконического месяца (периода между прохождениями Луны одного узла орбиты) в настоящий момент, учитывая встречное движение лунных узлов и отрицательное значение ω_N:

$$Y_{D0} = \frac{2\pi}{\Omega - \omega_N} = \frac{1}{(1/T) + (1/t_{N0})} = 0.949 \text{ года} = 346.6 \text{ сут};$$
$$M_{D0} = \frac{2\pi}{\omega - \omega_N} = \frac{1}{(1/t_0) + (1/t_{N0})} = 0.0745 \text{ года} = 27.21 \text{ сут}.$$

В настоящий момент драконический год содержит в себе около 12.7 драконических месяцев. Это число не целое, поэтому если в какой-то момент у нас происходит центральное солнечное затмение в зените, то через драконический год Луна не оказывается в этом узле и рядом с Солнцем на небе. До ближайшего новолуния проходит еще около 10 дней, за это время Солнце и узел орбиты смещаются, и условия наступления затмения становятся иными.

С течением времени Луна удаляется от Земли, ее угловая скорость ω уменьшается, а скорость движения узлов (по модулю) ω_N немного увеличивается. Продолжительность драконического месяца будет расти, а продолжительность драконического года – медленно убывать. В итоге, ближайшая «синхронная» ситуация может возникнуть в момент, когда драконический год Y_D будет содержать в себе ровно N=12 драконических месяцев M_D. Запишем соответствующее уравнение:

$$Y_D = \frac{2\pi}{\Omega - \omega_N} = N \cdot \frac{2\pi}{\omega - \omega_N};$$
$$\omega - \omega_N = N \cdot (\Omega - \omega_N).$$

Подставим сюда выражение для угловой скорости вращения узлов:

$$\omega + \frac{C \cdot \Omega^2}{\omega} = N \cdot (\Omega + \frac{C \cdot \Omega^2}{\omega}).$$

Преобразуем это в квадратное уравнение для ω:

$$\omega^2 - N\Omega\omega - C(N-1) \cdot \Omega^2 = 0.$$

Мы знаем, что величина ω положительна – Луна не будет менять направление вращения вокруг Земли. Поэтому мы выбираем единственный положительный корень уравнения:

$$\omega = \frac{N\Omega + \sqrt{N^2\Omega^2 + 4C(N-1)\Omega^2}}{2} = \Omega \cdot \frac{N + \sqrt{N^2 + 4C(N-1)}}{2} = \Omega \cdot 12.625.$$

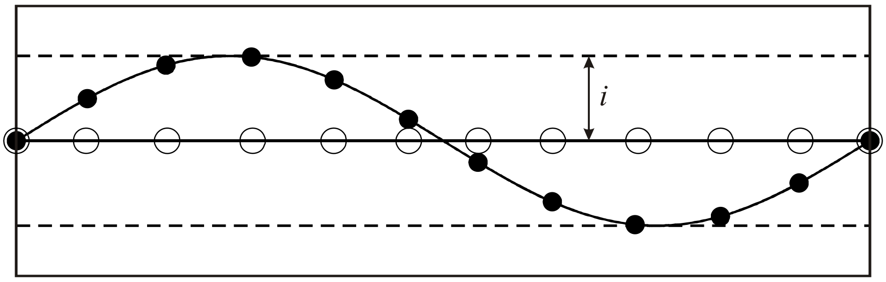
Период обращения Луны вокруг Земли будет равен 1/12.625 года или 28.93 суток. Определим расстояние от Земли до Луны в это время по III закону Кеплера:

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-2/3} = 1.039.$$

Расстояние окажется равным 399360 км. Если мы наблюдаем Луну в зените, то оказываемся ближе к ней на радиус Земли, то есть на расстоянии 392990 км. Угловой диаметр Луны с такого расстояния будет равен δ_L = 30.41′. Угловой диаметр Солнца с расстояния в 1 а.е. равен δ_S = 31.94′. В итоге, затмение в зените будет кольцеобразным, и его фазу можно определить просто как отношение диаметров: Φ = 0.952. Отметим, что с учетом реальной эллиптичности орбиты Луны такие затмения могут происходить и в настоящее время.

Определим, когда такая ситуация случится. Расстояние до Луны к этому времени должно увеличиться на $0.039 \cdot L_0 \approx 15$ тысяч км. При удалении на 3.8 см в год искомый интервал времени есть $(1.5 \cdot 10^7 / 3.8 \cdot 10^{-2}) \approx 400$ млн лет.

Нам остается рассмотреть другие затмения в ходе драконического года. По аналогии с современной эпохой, может показаться, что через половину драконического года может произойти еще одно похожее затмение. Но обратим внимание, что половина драконического года в ту будущую эпоху будет содержать ровно 6 драконических месяцев. В итоге, Луна окажется у того же самого узла орбиты, где она была во время центрального кольцеобразного затмения. Солнце же в это время окажется у противоположного узла. В этот момент затмение действительно произойдет, но оно будет полным лунным. Нас же по условию задачи интересуют солнечные затмения.



Можно показать, что драконический год, равный 12 драконическим месяцам, будет содержать ровно 11 синодических периодов Луны. Новолуния, при которых будут возможны затмения, произойдут через 5 и 6 синодических периодов Луны после центрального кольцеобразного затмения. Они произойдут на угловом расстоянии от узла орбиты:

$$\lambda = \frac{360^{\circ}}{2 \cdot 11} = 16.36^{\circ}.$$

Учитывая малость угла наклона орбиты Луны, геоцентрическое угловое расстояние Луны от эклиптики во время этих новолуний есть

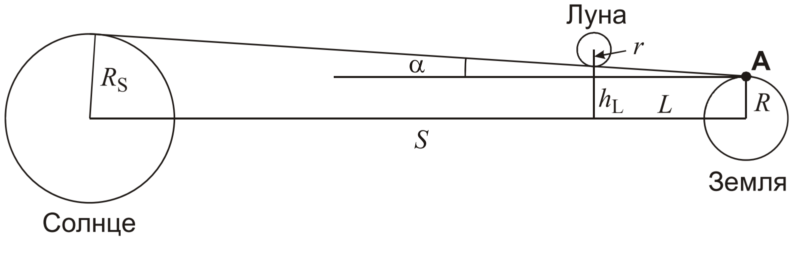
$$\beta = i \cdot \sin \lambda = 1.45°.$$

Переводя эту величину в угловые минуты, получаем 87.0′. Понять, будет ли при этом происходить солнечное затмение, можно несколькими способами. Один из них, самый простой, состоит в вычислении суточного параллакса Луны, который равен R/L= 0.0160 = = 54.8′. Даже при самых благоприятных обстоятельствах, когда параллактическое смещение приблизит на небе Луну к Солнцу, между их центрами угловое расстояние составит 32.2′. Эта величина больше суммы видимых радиусов Солнца (16.0′) и Луны у горизонта (15.0′). Таким образом, солнечных затмений у противоположного узла орбиты Луны вообще не будет!

К этому же выводу можно прийти более стандартным, хотя и сложным способом. Пространственное расстояние центра Луны от плоскости эклиптики есть

$$h = L \sin \beta = 10110 \text{ км}.$$

Рассмотрим предельную ситуацию, при которой наступает частное солнечное затмение. Максимальное расстояние Луны от плоскости эклиптики есть:



$$h_L = R + r + \alpha \cdot L = R + r + \frac{R_S - R}{S} \cdot L = \frac{R_S L + R(S - L) + rS}{S} = 9950 \text{ км}.$$

Здесь S – расстояние от Земли до Солнца, R_S, R и r – радиусы Солнца, Земли и Луны. Итак, в 5-м и 6-м новолунии расстояние Луны от плоскости эклиптики будет больше предельного, и солнечных затмений у противоположного узла орбиты не будет, случится только лунное. О других новолуниях, на еще большем расстоянии от узла, говорить и смысла нет. Итак, при такой ситуации на Земле будут происходить только кольцеобразные затмения раз в драконический год (около 345 с половиной суток).

6. Система оценивания.

<u>1 этап – 2 балла.</u> Определение угловой скорости движения Луны, при которой будет выполнено условие задания. Численное значение угловой скорости записывать необязательно, достаточно выражения, которое можно будет далее использовать для определения расстояния до Луны, фазы затмения и времени, через которое случится данная ситуация. Этап полностью засчитывается, если получена верная формула для угловой скорости. При неверном численном значении, если такое указывается, участник получит неправильное расстояние до Луны, и ему не будет засчитан следующий этап решения.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: участник предполагает, что период вращения узлов лунной орбиты остается равным 18.6 годам. Эффект от подобной ошибки невелик, угловая скорость Луны получается равной $12.591 \cdot \Omega$, а расстояние до Луны – 400100 км. Оценка уменьшается на 1 балл, дальнейшие этапы оцениваются, исходя из точности их выполнения.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: анализ второго корня квадратного уравнения, который не имеет смысла. Если это делается наряду с правильным корнем, решение оценивается, из итоговой оценки вычитается 2 балла. Если рассматривается только неправильный корень, общая оценка за решение не превосходит 2 баллов.

<u>2 этап – 1 балл.</u> Определение расстояния до Луны, точность 1%.

<u>3 этап – 2 балла.</u> Определение фазы затмения. Ее значение должно в точности соответствовать величине угловой скорости или расстояния до Луны, полученной участником.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: опускание фактора радиуса Земли, который увеличивает наибольшую фазу примерно на 0.015. Оценка уменьшается на 1 балл.

<u>4 этап – 1 балл.</u> Определение времени, через которое наступит подобная ситуация, точность 20 млн лет.

<u>5 этап – 2 балла.</u> Анализ ситуации, которая наступает через половину драконического года после описанного выше затмения. Участник должен сделать вывод, что в момент прохождения Солнцем противоположного узла солнечное затмение не произойдет, так как Луна будет располагаться с другой стороны от Земли. Таким образом, необходимо рассматривать два соседних новолуния, в которых условия для наступления затмения будут одинаковыми. Этап засчитывается только в этом случае. Если вывод участника сводится к тому, что около противоположного узла орбиты произойдет еще одно или какое-либо иное нечетное число затмений – этот и последующий этапы полностью не засчитываются .

<u>6 этап – 2 балла.</u> Определение количества и фазы затмений у противоположного узла. Этап засчитывается только в том случае, если делается обоснованное доказательство, что других затмений не происходит (участник может написать ответ – фаза равна нулю, что не вполне корректно, но за ошибку не считается, если при этом доказывается, что даже касательных затмений быть не может). При любых вариантах решения, в которых затмения у противоположного узла происходят, последний этап не засчитывается.

Возможное неполное решение: участник указывает, что пересечение Солнцем противоположного узла орбиты произойдет между новолуниями (выполняя тем самым 5 этап), и сразу делает вывод, что солнечных затмений не будет, не делая вычислений минимального расстояния между Солнцем и Луной на небе либо расстояния Луны от плоскости эклиптики, то есть хотя бы одним из двух способов. Последний этап засчитывается 1 баллом.

Максимальная оценка за все решение – 10 баллов.