ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

11.1. ЛЕТНЯЯ НОЧЬ *(О.С. Угольников)*

1. Условие. Наблюдатель находится в северном полушарии Земли на широте φ, меньшей широты Полярного круга, в момент летнего солнцестояния. На какой максимальной высоте над горизонтом он может увидеть планету Солнечной системы в сумеречный и ночной период, когда Солнце располагается не выше горизонта? Орбиты планеты и Земли – круговые с радиусами R и R_0 соответственно. Считать Солнце и планету точечными объектами, орбита планеты лежит в плоскости эклиптики, рефракцией пренебречь.

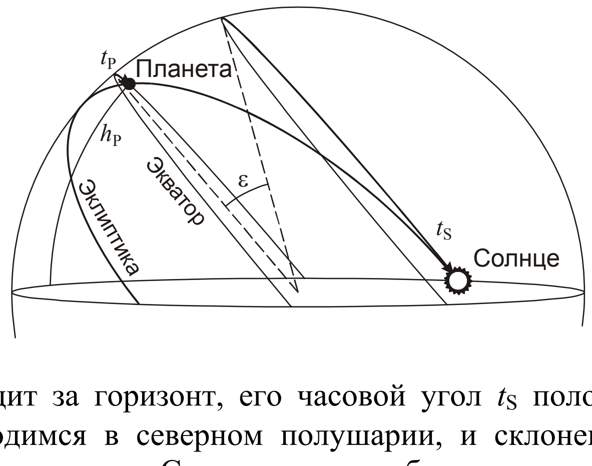
1. Решение. Решим вначале задачу для случая внешней планеты ($R > R_0$). Задачу проще всего было бы решить для момента солнечной полуночи (или, то же самое, для противостояния планеты). Это соответствует звездному времени 18 часов, эклиптика пересекает горизонт в точках равноденствий, а самой высокой точкой эклиптики окажется точка зимнего солнцестояния, которая в этот момент будет проходить верхнюю кульминацию на высоте

$$h_0 = 90° - \varphi - \varepsilon.$$

Здесь ε – угол наклона экватора к эклиптике. Однако, эта высота не будет максимально возможной для планеты. В указанный момент эклиптика будет образовывать минимальный угол с горизонтом для данной широты, равный h_0. Если мы располагаемся южнее Полярного круга, то в другие моменты ночи угол между эклиптикой и горизонтом будет больше, и планета (вдали от противостояния) может оказаться и на большей высоте.

По условию задачи, планета располагается в плоскости эклиптики. Тогда задачу можно решить, зафиксировав максимальный угол наклона эклиптики к горизонту и предположив, что планета располагается в наивысшей точке эклиптики в данный момент.

Угол наклона эклиптики к горизонту в летнее солнцестояние в северном полушарии минимален в полночь и возрастает к полудню. На всех рассматриваемых в задании широтах длительность ночи меньше половины суток, поэтому нас будет интересовать момент восхода (захода) Солнца.



Допустим, Солнце заходит за горизонт, его часовой угол t_S положителен и превышает 6 часов (так как мы находимся в северном полушарии, и склонение Солнца $\delta = \varepsilon > 0$). Рефракцией и угловыми размерами Солнца мы пренебрегаем, поэтому зенитное расстояние Солнца $z_S = 90°$. Для этой величины известно соотношение:

$$\cos z_S = \sin\varphi \sin\varepsilon + \cos\varphi \cos\varepsilon \cos t_S .$$

Тогда часовой угол Солнца есть

$$\cos t_S = \frac{\cos z_S - \sin\varphi \sin\varepsilon}{\cos\varphi \cos\varepsilon} = -\tan\varphi \tan\varepsilon.$$

Солнце находится на эклиптике и одновременно – на горизонте. Эклиптика с горизонтом не совпадает, коль скоро мы не находимся на Полярном круге. Следовательно, она пересекает его в двух точках – в Солнце и противосолнечной точке. Наивысшая точка эклиптики будет удалена от Солнца на 90° (в случае захода Солнца – к востоку), в ней и будет достигнут максимум положения точки эклиптики над горизонтом в летнюю ночь. В соответствии с условием, именно там и должна располагаться планета, проходящая точку квадратуры.

Очевидно, что речь идет о точке осеннего равноденствия (в случае восхода Солнца это была бы точка весеннего равноденствия). По прямому восхождению она отстоит от Солнца на 6 часов, и часовой угол этой точки t_L есть t_S – 90°. Из этого мы имеем

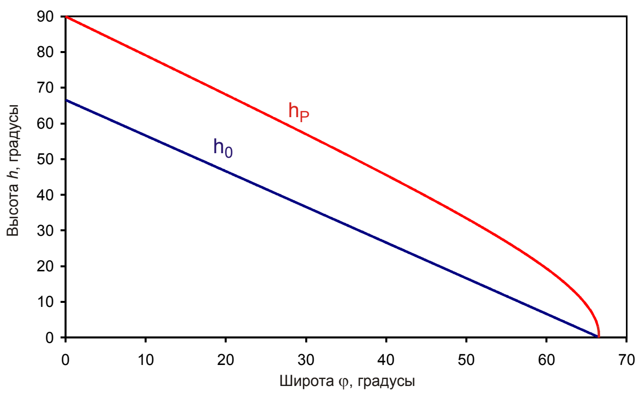
$$\sin t_P = -\cos t_P = \tan\varphi \tan\varepsilon.$$

Склонение этой точки $\delta_P = 0$, угол t_P положителен, но не превышает 6 часов (или 90°). Вновь воспользуемся формулой для зенитного расстояния, приведенной выше, и определим высоту данной точки над горизонтом:

$$\sin h_P = \cos z_S = \sin\varphi \sin\delta_P + \cos\varphi \cos\delta_P \cos t_P = \cos\varphi \cos t_P = \sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \tan^2\varepsilon}.$$

Более наглядной будет формула для косинуса этой величины:

$$\cos h_P = \sqrt{1 - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \tan^2\varepsilon} = \sin\varphi\sqrt{1 + \tan^2\varepsilon} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varepsilon}.$$



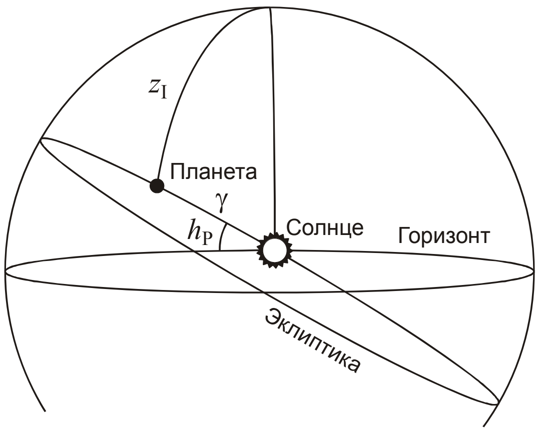
Эта высота больше, нежели высота h_0, рассчитанная в начале решения для планеты в противостоянии в кульминации, в чем можно убедиться по графику. На экваторе (φ = 0) планета может располагаться в зените, а на полярном круге (φ = 90° – ε) высота обращается в ноль. Примечательно, что наивысшее положение внешней планеты в летнюю ночь соответствует ее западной или восточной квадратуре, ответ для внешней планеты не зависит от радиуса ее орбиты R.

Теперь мы можем решить задачу и для случая внутренних планет ($R < R_0$). В квадратуре такие планеты оказаться не могут, их максимальное угловое удаление от Солнца есть

$$\gamma = \arcsin (R/R_0).$$

Тем не менее, максимальная высота такой планеты над горизонтом будет достигнута в тот же момент, когда эклиптика образует с горизонтом максимальный за летнюю ночь угол h_L. Зенитное расстояние планеты можно определить из сферического треугольника «планета – зенит – Солнце»:

$$\cos z_I = \cos\gamma \cos(\pi/2) + \sin\gamma \sin(\pi/2) \sin h_P = \sin\gamma \sin h_P.$$



Высота планеты h_I есть дополнение зенитного расстояния до $\pi/2$. Для нее мы имеем:

$$\sin h_I = \sin\gamma \sin h_P = \frac{R}{R_0}\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \tan^2\varepsilon}.$$

Окончательный ответ выглядит следующим образом:

$$h = \arcsin\left[\frac{R}{R_0}\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \tan^2\varepsilon}\right],\quad R < R_0;$$
$$h = \arcsin\left[\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \tan^2\varepsilon}\right] = \arccos\left[\frac{\sin\varphi}{\cos\varepsilon}\right],\quad R > R_0.$$

1. Система оценивания. Данная задача решается в общем виде, без численных выкладок. При проверке необходимо учесть, что способ решения участника может отличаться от приведенного выше, необходимо проверять правильность полученных соотношений и их эквивалентность приведенным выше (при возможно иной записи). Требуется точное соответствие, задача не предполагает приближенных вычислений. Оценка складывается из двух основных составляющих. Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе.

Максимальная оценка за все решение – 10 баллов.

Часть 1 – Качество решения (6 баллов).

<u>Этап 1 – 1 балл.</u> Указание момента восхода/захода Солнца как момента, когда эклиптика образует максимальный угол с горизонтом, и наивысшее положение планеты (как внутренней, так и внешней) должно соответствовать именно этому моменту.

<u>Этап 2 – 1 балл.</u> В случае внешней планеты она должна располагаться на небе строго в 90° от Солнца (что может, в частности, указываться как квадратура планеты).

<u>Этап 3 – 1 балл.</u> В случае внутренней планеты она должна располагаться в наибольшей элонгации.

<u>Этап 4 – 1 балл.</u> Правильное выражение для склонения внешней планеты, которое должно быть равно нулю (иными словами, внешняя планета должна располагаться на небесном экваторе).

Этап 5 – 1 балл. Правильное указание, что часовой угол внешней планеты должен отличаться от часового угла Солнца на 90°.

Этап 6 – 1 балл. Правильный анализ для случая внутренней планеты при том же положении эклиптики.

Часть 2 – Качество ответа (4 балла)

0 баллов: ответ отсутствует, либо в ответе участника высота планеты (как внешней, так и внутренней) не совпадает с верной ни при одном значении широты.

1 балл: ответ записан только для частных значений широт или в виде формулы для произвольной широты, но совпадает с правильным только для одного типа планет и только на одной широте (например, на Полярном круге, к этому же случаю относится рассмотрение планеты в кульминации, описанное выше).

2 балла:
а) ответ полностью соответствует верному для одного из типов планет (например, для внешних) для любой широты, но не записан либо неверен ни для одной широты для другого типа планет;
б) записан для обоих типов планет и верен хотя бы для одной широты и в одном, и в другом случае.

3 балла: записанный ответ полностью соответствует верному для одного из типов планет для любой широты, а также является верным хотя бы при одном значении широты для другого типа планет.

4 балла: дан точный правильный ответ для обоих типов планет (при этом его запись может отличаться от приведенной выше, необходима проверка однозначного соответствия).

Фактически, оценка за качество решения является суммой 2-балльных оценок для каждого из типов планет, где ставится 0 за полностью неверную формулу, 1 – за частично верную и 2 – за полностью верную формулу.

Замечание: участник может рассматривать момент восхода Солнца. Структура решения при этом не меняется, внешняя планета располагается в точке весеннего равноденствия, часовые углы Солнца и планеты меняют знак.

Замечание: участник может не записывать формулы для самой высоты, а выписать соотношение для их синуса или косинуса, что считается достаточным.

Возможное неправильное решение: определение высоты точки зимнего солнцестояния в верхней кульминации (эквивалентно максимальной высоте планеты в противостоянии), первая формула решения. Верного выполнения какого-либо из этапов нет, ставится 0 баллов за качество решения и 1 балл за качество ответа.

Возможное неправильное решение: участник устанавливает, что внешняя планета располагается в точке равноденствия, но далее вычисляет максимальную высоту, соответствующую верхней кульминации этой точки (h = 90° – φ), считая часовой угол нулевым. Планета в точке равноденствия может быть на такой высоте, но момент кульминации летом попадет на дневное время, что не соответствует условию задачи. В этом случае могут быть засчитаны этапы 1, 2 и 4 при условии их правильного выполнения и 1 балл за качество ответа (он оказывается верен в зените). К этим 4 баллам добавляются баллы за правильный анализ случая внутренних планет, если он был сделан.

11.2. РАДИАНТ В ДВИЖЕНИИ *(О.С. Угольников)*

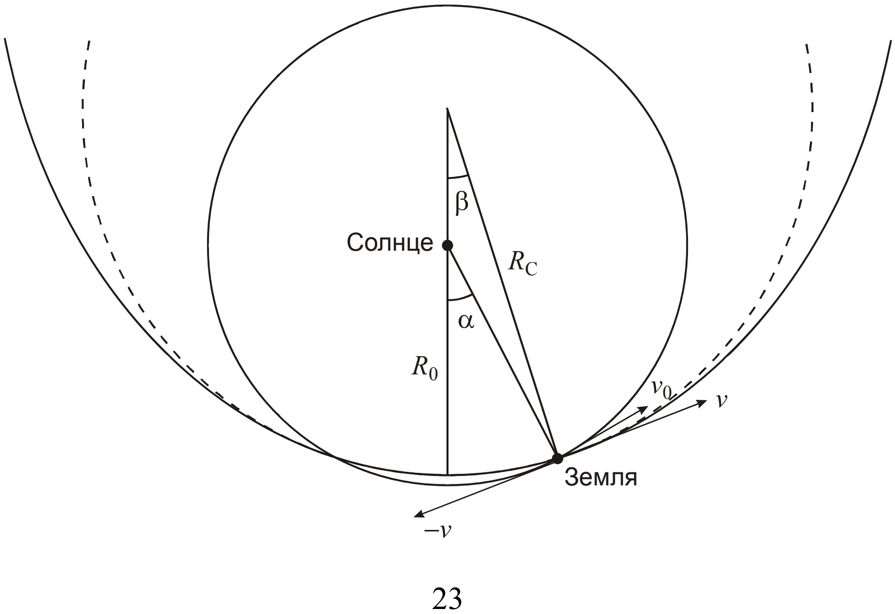
2. Условие. В момент максимума активности метеорного потока его радиант наблюдается на эклиптике в 90º от Солнца и смещается по ходу периода активности вдоль эклиптики с угловой скоростью ω (она считается положительной, если радиант движется в том же направлении, что и Солнце, и отрицательной при встречном движении). Определите характерную большую полуось орбит метеорных частиц, считая, что метеорный рой компактен, и все его частицы имеют одинаковую гелиоцентрическую долготу перигелия. Орбиту Земли считать круговой с радиусом R_0, масса Солнца равна M, взаимодействие частиц с Землей и осевое вращение Земли не учитывать.

2. Решение. В условии задачи не сказано, с какой стороны от Солнца располагался радиант. Тем не менее, мы можем сделать вывод, что геоцентрическая скорость метеоров в момент максимума перпендикулярна линии Солнце-Земля. Следовательно, гелиоцентрическая скорость метеоров в центре роя, равная векторной сумме геоцентрической скорости и скорости движения Земли, также перпендикулярна линии Солнце-Земля, и в момент максимума Земля оказывается на долготе перигелия или на долготе афелия орбиты, общей для всех частиц роя.

Так как нам неизвестно, находятся ли частицы в перигелии либо в афелии, обозначим через e эксцентриситет их орбит, но будем считать его положительным, если встреча произошла в перигелии и отрицательным для случая афелия. Расстояние Земли от Солнца обозначим как R_0. Тогда искомая большая полуось орбиты метеорных тел (тех, что попали в центр роя и встретились с Землей в максимуме) и их скорость равны

$$a = \frac{R_0}{1-e}; \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R_0}(1+e)} = v_0\sqrt{1+e}.$$

Здесь v_0 – орбитальная скорость Земли. Рассмотрим момент времени, отстоящий от максимума на очень малый промежуток времени t. Земля сместится по орбите на угол $\alpha = \omega_0 t$, где $\omega_0 = v_0/R_0$ – угловая скорость Земли. На такой же угол повернется вектор скорости Земли $\mathbf{v}_0$. В этот момент она будет встречаться с другими частицами роя с несколько иным перигелийным (либо афелийным) расстоянием.



Нам надо выяснить направление вектора скорости этих метеоров **v**, не забывая, что они могут двигаться как навстречу Земле, так и в ту же сторону. Это можно сделать, используя уравнение эллипса в полярных координатах, однако мы можем поступить проще, избавляя себя от громоздких выкладок. Учтем, что рой компактен, величина t очень мала, и мы находимся вблизи точки перигелия либо афелия орбиты частиц. На рой действует сила притяжения Солнца. Создаваемое ей ускорение связано с мгновенным радиусом кривизны траектории R_C известным соотношением

$$g = \frac{GM}{R_0^2} = \frac{v^2}{R_C} = \frac{v_0^2(1+e)}{R_C}.$$

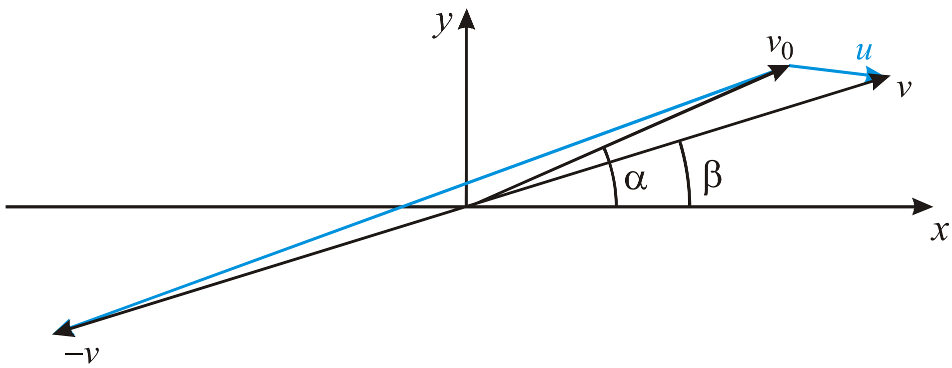
Отсюда мы получаем выражение для радиуса кривизны:

$$R_C = \frac{v_0^2(1+e)R_0^2}{GM} = R_0(1+e).$$

На коротких масштабах мы можем считать траекторию метеорных тел окружностью с радиусом R_C, центр которой смещен относительно Солнца (см. рисунок). Тогда через время t вектор скорости метеорных тел, с которыми будет встречаться Земля, повернется на малый угол

$$\beta = \frac{R_0 \cdot \omega_0 t}{R_C} = \frac{\alpha}{1+e}.$$

Обратим внимание, что мы не знаем направления движения частиц. Будем считать, что их скорость v положительна, если они движутся в одну сторону с Землей и отрицательна, если они движутся навстречу Земле. Определим направление геоцентрической скорости метеоров.



Выберем систему координат, ось x которой направлена в сторону движения Земли в момент максимума потока. Через малое время t она будет образовывать с этой осью малый угол α, а скорость метеорных частиц – малый угол β. Ввиду малости этих углов проекция геоцентрической скорости частиц на ось x остается равной

$$u_X = \pm v - v_0 = v_0 \cdot (\pm\sqrt{1+e} - 1).$$

Обратим внимание, что при $e \neq 0$ эта проекция не может быть нулевой. Знаки «+» и «–» здесь соответствуют сонаправленному и встречному движению частиц по отношению к Земле. Проекция геоцентрической скорости на ось y есть

$$u_Y = \pm v \cdot \beta - v_0 \cdot \alpha = v_0 \cdot \alpha \cdot (\pm\frac{\sqrt{1+e}}{1+e} - 1).$$

Если величина u_X положительна, то угол поворота геоцентрической скорости метеоров за время t есть

$$\gamma = \frac{u_Y}{u_X} = \alpha \cdot \frac{\pm\frac{\sqrt{1+e}}{1+e} - 1}{\pm\sqrt{1+e} - 1} = \frac{\alpha}{1+e} \cdot \frac{\pm\sqrt{1+e} - (1+e)}{\pm\sqrt{1+e} - 1} = \frac{\alpha}{1+e} \cdot (\mp\sqrt{1+e}) = \frac{\mp\alpha}{\sqrt{1+e}}.$$

Если же величина u_X отрицательна, то угол поворота составит

$$\gamma = \frac{-u_Y}{u_X} = \frac{\pm\alpha}{\sqrt{1+e}}.$$

Отсюда мы находим угловую скорость движения радианта для всех возможных случаев:

$$\omega = \frac{\gamma}{t} = \frac{\pm\omega_0}{\sqrt{1+e}}.$$

Нас не интересует, в каком случае эта угловая скорость будет положительной, а в каком отрицательной, так как нам нужно найти эксцентриситет, а он не зависит от знака угловой скорости:

$$e = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1.$$

Вспомним, что величину e мы считали положительной для случая перигелия и отрицательной для случая афелия. Нам остается взять выражение для большой полуоси орбиты и записать окончательный ответ:

$$a = \frac{R_0}{1-e} = \frac{R_0}{2-(\omega_0/\omega)^2} = \frac{R_0}{2 - \frac{GM}{R_0^3\omega^2}} = \frac{R_0^4}{2R_0^3 - GM/\omega^2}.$$

Обратим внимание на интересный факт – полученное соотношение напоминает выражение для большой полуоси в зависимости от угловой скорости движения тела в перигелии либо афелии, но там выражение $(\omega/\omega_0)^2$ в знаменателе стояло бы в обратном виде. Для параболической орбиты (e=1) угловая скорость движения в перигелии есть $\omega_0\cdot\sqrt{2}$, а для геоцентрической угловой скорости радианта метеоров мы получаем $\omega_0/\sqrt{2}$. Если мы представим себе очень быстрые метеорные потоки на гиперболических орбитах, то в этом случае угловая скорость движения радианта была бы меньше, чем для эллиптических орбит.

Если орбита метеорных тел близка к круговой с $a = R_0$ и $e = 0$, то скорости метеоров будут поворачиваться вместе с Землей, что соответствует $\omega = \omega_0$. Максимальной скорость движения радианта была бы для гипотетического потока, для которого положение Земли совпадало с афелием орбиты, а дальше метеорные тела просто падали на Солнце.

Примечателен симметричный вид картины относительно направления движения частиц. Если представить себе два метеорных потока с идентичными орбитами в плоскости эклиптики и разным направлением движения, то у этих потоков существенно различались бы геоцентрические скорости, но вот движение радианта происходило бы с одинаковыми по модулю и разными по направлению угловыми скоростями.

2. Система оценивания. Оценка за решение образуется из двух составляющих – качество решения и качество ответа (6 и 4 балла соответственно). Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 10 баллов.

Часть 1 – качество решения (6 баллов).

<u>Этап 1 – 3 балла.</u> Правильное соотношение между углами поворота гелиоцентрических скоростей метеоров и Земли при смещении относительно момента максимума потока. Соотношение удобней всего выражать через эксцентриситет, при этом можно либо считать его отрицательным в случае афелия, либо записывать для афелия отдельную формулу. Выражение может быть получено как из уравнений эллипса, так и с применением параметра кривизны траектории, как сделано выше. Вместо эксцентриситета можно использовать соотношение большой полуоси и радиуса орбиты Земли a/R_0. В этом случае формулы получаются более громоздкими, но отпадает надобность отдельно оговаривать случаи перигелия и афелия частиц.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: участник рассматривает только случай перигелия частиц либо записывает универсальные формулы, не оговаривая, что величина e может быть отрицательной, и это соответствует афелию. Данный этап оценивается в 1 балл, однако последующие могут быть оценены полностью при условии верного выполнения, так как верные соотношения могут являются универсальными.

<u>Этап 2 – 3 балла.</u> Выражение угловой скорости радианта в зависимости от эксцентриситета или отношения a/R_0.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: аналогично первому этапу, участник не рассматривает возможность встречных и попутных потоков или разных направлений геоцентрической скорости относительно движения Земли. Аналогично, этап оценивается в 1 балл, но другие могут быть оценены полностью, так как рассмотрение одного частного случая может в итоге дать верную универсальную формулу.

Вероятная ошибка при выполнении всего решения: при движении радианта анализируется гелиоцентрическая скорость вместо геоцентрической. Первый этап засчитывается не выше 2 баллов, так как в нем анализируется только орбита метеоров. Второй этап не оценивается. Вторая часть решения оценивается, исходя из полученного ответа.

Часть 2 – качество ответа (4 балла).

<u>0 баллов:</u> ответ отсутствует либо не соответствует размерности. К этому же случаю относится ситуация, когда в формуле ответа складываются величины разной размерности.

Примечание: участник может выразить ответ в астрономических единицах, записав выражение $1/(2-(\omega_0/\omega)^2)$ или аналогичной формы. Это не считается нарушением правила размерностей.

<u>1 балл:</u> ответ записан, соответствует размерности, но не является симметричным относительно знака величины ω (в нем присутствует параметр ω в нечетной степени, подстановка величины $-\omega$ вместо ω дает иной ответ).

2 балла: ответ записан, соответствует размерности и симметричен относительно знака угловой скорости радианта. При этом реализуется одна из ситуаций:
а) существуют значения ω, при котором большая полуось a положительна и возрастает с модулем ω. К этому же случаю относится запись выражения для угловой скорости движения тела в перигелии, которая отличается от правильной перестановкой ω и ω_0.
б) большая полуось a определена и положительна для любых значений ω. К примеру, участник может просто использовать формулу для угловой скорости для кругового вращения и записать ответ $a = (GM/\omega^2)^{1/3}$.

3 балла: ответ записан, соответствует размерности и симметричен относительно знака угловой скорости радианта. Большая полуось определена и положительна не для любых значений ω, но в области, где она положительна, она всегда уменьшается с увеличением модуля угловой скорости ω. При этом ответ не соответствует правильному.

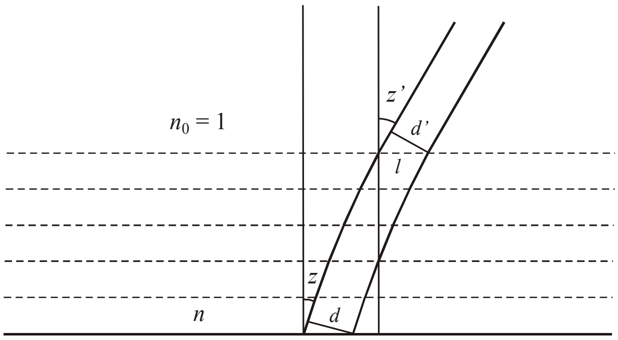
4 балла: ответ, однозначно эквивалентный правильному (запись может иметь разные формы).

11.3. ДАЛЕКОЕ НЕБО *(О.С. Угольников)*

3. Условие. В рамках программы поиска обитаемых миров космический аппарат будущего совершил посадку на некоторую планету около звезды сферической формы и измерил физические характеристики планетной атмосферы. Оказалось, что ее вертикальная оптическая толщина равна τ, а показатель преломления воздуха у поверхности – n. Определите зависимость полной звездной величины звезды m и ее поверхностной звездной величины (с квадратной секунды) μ от видимого зенитного расстояния центра звезды z, если в зените эти величины составляли m_0 и μ_0 соответственно.

При решении рассмотрите положения звезды достаточно высоко над горизонтом, когда не нужно принимать в расчет кривизну поверхности планеты, и атмосфера считается состоящей из плоскопараллельных слоев. Считайте, что $\tau \ll 1$ и $(n-1) \ll 1$, обе величины не зависят от длины волны, однако взаимное соотношение между ними может быть любым. Ответ нужно получить с точностью до слагаемых порядка τ^1 и $(n-1)^1$. Отражением света от атмосферных слоев пренебречь, угловой диаметр звезды в небе считать малым.

3. Решение. Рассмотрим для начала идеализированный случай абсолютно прозрачной атмосферы: $\tau = 0$. Тогда единственным фактором, который будет влиять на визуальные характеристики звезды, станет атмосферная рефракция. По условию задачи, мы считаем атмосферу плоскопараллельной. Пусть центр звезды виден на зенитном расстоянии z.



Изобразим траекторию луча от центра звезды сквозь атмосферу. По закону Снеллиуса, произведение показателя преломления и синуса угла между траекторией луча и отвесной линией $n(h)\cdot\sin z(h)$ есть постоянная величина. Поэтому мы можем не рассматривать изменение траектории луча в разных слоях атмосферы, а сразу сравнить ее до входа в атмосферу (показатель преломления равен 1) и у поверхности:

$$n \cdot \sin z = \sin z'.$$

Здесь z' – зенитное расстояние источника света за атмосферой. По условию задачи, показатель преломления у поверхности n мало отличается от единицы. Обозначим разность зенитных расстояний за атмосферой и у поверхности $z'-z$ (фактически, величину рефракции) как Δz, и она невелика. Тогда мы можем записать:

$$\sin(z + \Delta z) = n \cdot \sin z = \sin z + (n-1)\sin z.$$

По свойствам приближенных вычислений

$$\sin(z + \Delta z) = \sin z + \Delta z \cos z.$$

Отсюда мы получаем выражение для величины рефракции:

$$\Delta z = (n-1)\tan z,$$

которое хорошо известно в несколько ином виде: безразмерная величина (n – 1) переводится в угловые секунды (умножается на 206265″) и называется постоянной рефракции. На Земле она равна примерно 60″.

Рефракция сказывается как на суммарной яркости центральной звезды, так и на ее угловых размерах. Действительно, рассмотрим некий второй луч звезды, параллельно смещенный относительно первого на величину l по горизонтали. Тогда расстояние между лучами за атмосферой и у поверхности есть

$$d' = l \cos z', \; d = l \cos z.$$

Соотношение между плотностями потока энергии будет выглядеть как

$$\frac{J}{J_0} = \frac{\cos z'}{\cos z}.$$

Это не входит в противоречие с тем, что прозрачная плоскопараллельная атмосфера не должна изменять величину потока энергии от звезды на поверхности. Действительно, уменьшение плотности потока энергии будет компенсировано тем, что лучи будут приходить на поверхность под меньшим углом к нормали, соответствующий фактор также описывается соотношением косинусов зенитных расстояний. Подставим в последнюю формулу соотношение для зенитных расстояний:

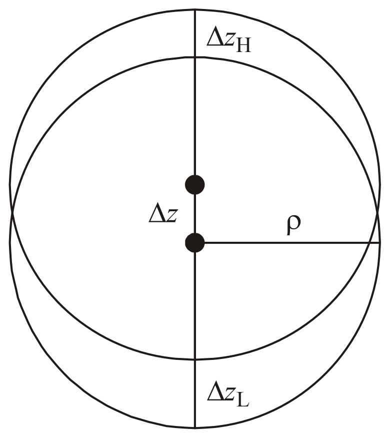
$$\frac{J}{J_0} = \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 z}}{\cos z} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 z - (n^2 - 1)\sin^2 z}}{\cos z} = \frac{\sqrt{\cos^2 z - (n^2 - 1)\sin^2 z}}{\cos z}.$$

Учитывая малость величины (n – 1), имеем:

$$\frac{J}{J_0} = \sqrt{1 - (n^2 - 1)\tan^2 z} \approx \sqrt{1 - 2(n - 1)\tan^2 z} \approx 1 - (n - 1)\tan^2 z.$$

Рассмотрим теперь, как будет выглядеть звезда в небе планеты. Пусть ее угловой радиус равен ρ, по условию задачи эта величина небольшая. Верхний край звезды, соответствующий меньшему зенитному расстоянию z_H, будет «приподниматься» за счет рефракции слабее, чем нижний (зенитное расстояние z_L). В итоге, изображение звезды станет эллипсом с вертикально ориентированной малой осью. Пусть реальной угловой радиус звезды равен ρ. Тогда мы имеем:

$$z'_{L,H} = z' \pm \rho = z_{L,H} + (n - 1) \tan z_{L,H}.$$



Обозначим малую полуось эллипса – видимого изображения звезды как b. Тогда

$$z_{L,H} = z \pm b;$$
$$\tan z_{L,H} = \tan z \pm \frac{b}{\cos^2 z};$$
$$z' \pm \rho = z + (n - 1)\tan z \pm b \pm (n - 1)\frac{b}{\cos^2 z}.$$

Из этого получаем

$$\rho = b + (n-1)\frac{b}{\cos^2 z} = b \cdot \frac{\cos^2 z + (n-1)}{\cos^2 z}.$$

В итоге, для малой полуоси имеем

$$b = \rho \cdot \frac{\cos^2 z}{\cos^2 z + (n-1)}.$$

Интересно, что даже в зените малая полуось b_0 не оказывается равной истинному угловому радиусу звезды, она там лишь совпадает с большой полуосью a, равной ρ/n. Однако, размер большой полуоси не меняется с зенитным расстоянием, поэтому мы можем сравнить площади изображения звезды на зенитном расстоянии z и в зените:

$$\frac{s}{s_0} = \frac{b}{b_0} = \frac{n \cdot \cos^2 z}{\cos^2 z + (n-1)} = \frac{\cos^2 z + (n-1)(1-\sin^2 z)}{\cos^2 z + (n-1)} \approx 1 - (n-1)\tan^2 z.$$

Площадь видимого диска звезды уменьшилась так же, как и его суммарная яркость. Поверхностная яркость звезды при наблюдении через прозрачную преломляющую атмосферу не зависит от ее зенитного расстояния. Мы вывели это свойство для случая плоскопараллельной атмосферы и малого отличия показателя преломления от единицы. На самом деле, поверхностная яркость источника (или интенсивность его излучения) остается в точности неизменной при условии фиксированных показателей преломления сред, в которых находятся источник и приемник, а также отсутствия ослабления (поглощения, рассеяния) на пути распространения излучения.

Теперь учтем наличие этого самого поглощения, а точнее – ненулевой вертикальной оптической толщины атмосферы τ. Вообще говоря, траектория распространения излучения не является прямой линией. Но с учетом малой величины $(n-1)$ при расчете поглощения мы можем считать ее таковой, а угол наклона к вертикали – равным z (именно таким он будет в самых низких плотных слоях атмосферы, где и происходит основное поглощение). Погрешность от такого предположения будет иметь порядок величины произведения сразу двух малых величин $\tau \cdot (n-1)$, и мы можем не принимать этот фактор во внимание. Тогда ослабление как полной, так и поверхностной яркости вследствие поглощения будет выражаться законом Бугера:

$$\frac{J_{\mathrm{E}}}{J} = \frac{j_{\mathrm{E}}}{j} = \exp(-\tau \cdot \frac{1}{\cos z})).$$

Учитываем полученные ранее соотношение для J/J_0 и независимость j от зенитного расстояния, имеем:

$$J_{\mathrm{E}} \approx J_0 \cdot (1-(n-1)\tan^2 z)\cdot \exp(-\tau \cdot \frac{1}{\cos z}) \approx J_{\mathrm{E}}(z=0)\cdot(1-(n-1)\tan^2 z)\cdot\exp(-\tau\cdot(\frac{1}{\cos z}-1));$$

$$j_{\mathrm{E}} \approx j_0 \cdot \exp\,(-\frac{\tau}{\cos z}) \approx j_{\mathrm{E}}(z=0)\cdot \exp\,(-\tau\cdot(\frac{1}{\cos z}-1)).$$

Воспользовавшись формулой Погсона, получаем искомые зависимости:

$$m = m_0 - 2.5\lg\frac{J_{\mathrm{E}}}{J_{\mathrm{E}}(z=0)} = m_0 + \frac{2.5}{\ln 10}\cdot((n-1)\tan^2 z + \tau\,((1/\cos z)-1));$$

$$\mu = \mu_0 - 2.5\lg\frac{j_{\mathrm{E}}}{j_{\mathrm{E}}(z=0)} = \mu_0 + \frac{2.5\cdot\tau}{\ln 10}((1/\cos z)-1).$$

Величина $2.5/\ln 10 = (\ln 2.512)^{-1}$ равна примерно 1.09 и хорошо известна всем, кто занимается фотометрией небесных светил. При фотометрии светил на Земле мы учитываем лишь второе из слагаемых в квадратных скобках формулы для звездной величины. Связано это с тем, что фактор (n–1) на Земле на три порядка меньше, чем τ, и при больших высотах над горизонтом он незаметен на фоне даже современных погрешностей фотометрии. Хотя у горизонта уменьшение размеров и яркости небесных светил за счет рефракции вполне ощутимо.

Можно предположить, что на других планетах с газовыми атмосферами ситуация может быть иной. Действительно, величина τ при фиксированном химическом составе атмосферы пропорциональна количеству частиц в столбе воздуха, то есть отношению атмосферного давления и ускорения свободного падения p/g. Величина (n–1) пропорциональна концентрации молекул у поверхности, то есть отношению давления и температуры p/T. Таким образом, отношение $(n–1)/\tau$, очень малое на Земле, пропорционально g/T и может оказаться значительным в атмосферах холодных планет с большой силой тяжести. Все сказанное не относится к поверхностной яркости протяженных источников, на которую рефракция не влияет.

3. Система оценивания. Решение задачи предусматривает корректный учет двух факторов, которые могут влиять на фотометрические характеристики светил на разных зенитных расстояниях. При тех допущениях, что сделаны в условии задачи, действие этих факторов независимо, и в итоге они дают два отдельных слагаемых в итоговом ответе. Система оценивания состоит из трех частей: независимого анализа влияния каждого фактора и анализа общего ответа.

Часть 1 – анализ влияния поглощения (2 балла). При оценивании работы жюри должно выделить в обеих итоговых формулах слагаемые, содержащие вертикальную оптическую толщину атмосферы τ. Если структура ответа не позволяет сделать это напрямую, то в ответ участника подставляется n=1 и анализируется зависимость данного частного ответа от τ. Оценка за данную часть выставляется следующим образом:

<u>0 баллов:</u>
а) Ответов нет;
б) Итоговые формулы не имеют вида $m = m_0 + f_1(z)$, $\mu = \mu_0 + f_2(z)$.
в) Формулы имеют указанный вид, но функции $f_{1,2}(z)$ в двух случаях разные, и ни одна из них не является в точности верной;
г) Функции одинаковые, но в них неверен как численный коэффициент, так и характер зависимости от z.

<u>1 балл:</u>
а) Функции $f_{1,2}(z)$ разные, и одна из них является в точности верной. Численный коэффициент может быть записан как в общем, так и в численном (1.09 или 1.086) виде.
б) Функции $f_{1,2}(z)$ одинаковые, зависимость от z в точности верная, коэффициент ошибочен.
в) Функции $f_{1,2}(z)$ одинаковые, численный коэффициент верный, зависимость от z неверна, в частности, может иметь вид ($1/\cos z$) без вычета единицы.

<u>2 балла:</u>
Обе функции одинаковы и в точности верны.

Часть 2 – анализ влияния рефракции (6 баллов). При оценивании работы жюри должно выделить в обеих итоговых формулах слагаемые, содержащие показатель преломления приземной атмосферы n. Если структура ответа не позволяет сделать это напрямую, то в ответ участника подставляется $\tau = 0$ и анализируется зависимость данного частного ответа от

n. При проверке нужно иметь ввиду, что правильный ответ может быть получен сразу несколькими способами, и каждый из них в отдельности достаточен:
1) Указание, что светило поднимается над горизонтом, его лучи образуют меньший угол с горизонтальной поверхностью, но при этом поток энергии через эту поверхность не меняется;
2) Анализ изменения плотности потока излучения в результате его преломления;
3) Использование (без доказательства) того факта, что при отсутствии поглощения поверхностная яркость объекта не зависит от его положения на небе, и тем самым изменение полной яркости определяется только изменением его видимой площади.

Проверка выполнения этого этапа производится по следующей процедуре: правильность зависимости $m(z)$ при $\tau=0$ оценивается от 0 до 3 баллов. Далее эта оценка ***удваивается***, если участник указывает на постоянство величины $\mu(z)$ при $\tau=0$. Если же оценка за зависимость $m(z)$ была нулевой, за указание независимости μ от z добавляется 1 балл. Таким образом, если в ответе участника обе величины $m(z)$ и $\mu(z)$ оказываются постоянны при $\tau=0$ – за весь этап выставляется 1 балл.

Оценивание зависимости $m(z)$ при $\tau=0$:

<u>0 баллов:</u>
а) Ответа нет;
б) Ответ есть, но он не соответствует критериям, при котором выставляется хотя бы 1 балл.
в) Участник предполагает (или это следует из его выводов), что интегральная звездная величина m (в ситуации отсутствия поглощения) не зависит от зенитного расстояния за счет рефракции.

<u>1 балл:</u>
а) Зависимость имеет вид $m = m_0 + C\cdot(n-1)\cdot q(z)$, где $q(z)\sim z^2$ при малых z, причем $C\neq0$. При $C = 2.5/\ln10 = 1.09$ или $q(z) = \tan^2 z$ оценка возрастает до 2 баллов, см. далее.
б) Зависимость имеет вид $m = m_0 + C\cdot(n-1)\cdot q(z)$, где $q(z)\sim z$ при малых z, а коэффициент C верный ($2.5/\ln10 = 1.09$).
в) Зависимость совпадает с верной, но вместо $(n-1)$ указана величина n.

<u>2 балла:</u>
а) Характер зависимости от z верный, коэффициент положительный, но ошибочный.
б) Вместо $\tan^2 z$ указана другая функция, растущая как z^2 при малых z (z^2, $\sin^2 z$, $z\cdot\tan z$ и т.д.), коэффициент при этом верный.
с) Участник не принимает во внимание тот факт, что в зените угловые размеры объекта также меняются, и вместо $\tan^2 z$ он получает фактор $(1 - (n-1)/\cos^2 z)$, который не обращается в ноль в зените. Вносимая этим ошибка имеет порядок величины $(n-1)$ и считается значимой.

<u>3 балла:</u>
Зависимость в точности верна.

Часть 3 – составление общего ответа (2 балла).

<u>0 баллов:</u> итоговый ответ участника отсутствует, либо его нельзя представить в виде

$$m(z) = m_0 + C_1\,(n-1)\,q\,(z) + C_2\,\tau\,f\,(z) + x,$$

где величина x имеет порядок малости $(n-1)\tau$, $(n-1)^2$, τ^2 или менее. То же относится к зависимости $\mu(z)$.

1 балл: оба ответа можно представить в данном виде путем некоторых преобразований с учетом допущений, сделанных в условии задания. К этому же случаю относятся верные коэффициенты C и зависимости q и f с ненулевым фактором x.

2 балла: ответы участником представлены в виде:

$$m(z) = m_0 + C_1\,(n - 1)\,q\,(z) + C_2\,\tau\,f\,(z),$$

аналогично для $\mu(z)$. Коэффициенты могут быть любыми (в том числе нулевыми), их правильность оценивалась на предыдущих этапах.

10/11.4. ТОНКИЙ БАЛАНС *(О.С. Угольников)*

4. Условие. Слабо пульсирующая переменная звезда изменяет свою звездную величину по синусоидальному закону с периодом τ, разница болометрических звездных величин в минимуме и максимуме равна Δm. Черная теплопроводная сферическая пылинка радиусом r и плотностью ρ находится вдали от поверхности звезды. Она не вращается вокруг звезды, а лишь совершает колебательные движения вдоль направления на звезду, при этом ее средние за период колебаний расстояние до звезды R и температура T остаются постоянными. Определите длину отрезка, который описывает пылинка в ходе колебаний. Считать величину изменений блеска Δm и период колебаний τ малыми (Δm<<1, период много меньше орбитального периода, соответствующего расстоянию R). Пылинка взаимодействует с излучением по законам геометрической оптики.

4. Решение. На пылинку действуют две силы: притяжение со стороны звезды и давление ее излучения. Запишем выражения для этих сил для произвольного расстояния от звезды L:

$$F_{\mathrm{G}} = \frac{4\pi GM\rho r^3}{3L^2}; \quad F_{\mathrm{E}} = \frac{J\cdot\pi r^2}{4\pi cL^2} = \frac{J\cdot r^2}{4cL^2}.$$

Здесь M – масса звезды, которая нам неизвестна. Во втором случае мы учли, что сила давления излучения есть плотность потока энергии, деленная на скорость света. Так как пылинка черная, это излучение не отражается напрямую, а собственное тепловое излучение теплопроводной пылинки изотропно и не влияет на ее движение. Обе силы убывают обратно пропорционально квадрату расстояния до звезды, их соотношение не меняется с расстоянием. Пылинка находится вблизи положения равновесия, то есть средние значения этих сил за период колебаний совпадают:

$$\frac{4\pi GM\rho r^3}{3} = \frac{J_0\cdot r^2}{4c},$$

и для средней за период светимости мы имеем:

$$J_0 = \frac{16\pi cGM\rho r}{3}.$$

Звездная величина (абсолютная или видимая на фиксированном расстоянии) звезды меняется со временем следующим образом:

$$m = m_0 + \frac{\Delta m}{2}\cdot\sin\frac{2\pi t}{\tau}.$$

По условию задачи величина Δm мала, поэтому мы можем записать выражение для изменения светимости звезды:

$$J = const\cdot 10^{-0.4m} = J_0\cdot 10^{-0.4\frac{\Delta m}{2}\cdot\sin\frac{2\pi t}{\tau}} \approx J_0\cdot\left(1 - \frac{\ln 10}{5}\Delta m\cdot\sin\frac{2\pi t}{\tau}\right).$$

Равнодействующая двух сил составит:

$$F = F_{\mathrm{E}} - F_{\mathrm{G}} = \frac{J \cdot r^2}{4cL^2} - \frac{4\pi GM\rho r^3}{3L^2} = \frac{J_0 \cdot r^2}{4cL^2} + \frac{\ln 10}{5}\frac{J_0 \cdot r^2 \Delta m}{4cL^2}\sin\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{4\pi GM\rho r^3}{3L^2}.$$

Первое и третье слагаемое компенсируют друг друга, и в итоге:

$$F = \frac{\ln 10}{5}\frac{J_0 \cdot r^2 \Delta m}{4cL^2}\sin\frac{2\pi t}{\tau}.$$

Период колебаний и разность звездных величин Δm малы, и пылинка не успевает существенно изменить свое расстояние до звезды. Поэтому мы можем считать, что в этой формуле $L \approx R$, и пылинка движется под действием гармонической силы. Но нам неизвестна величина J_0. Чтобы определить ее, запишем уравнение теплового баланса для пылинки:

$$\frac{J_0}{4\pi R^2} \cdot \pi r^2 = 4\pi\sigma r^2 T^4; \quad \frac{J_0}{4R^2} = 4\pi\sigma T^4.$$

Подставим последнее выражение в формулу для равнодействующей силы с учетом $L=R$:

$$F = \frac{\ln 10}{5} \cdot \frac{4\pi\sigma T^4 \cdot r^2 \Delta m}{c}\sin\frac{2\pi t}{\tau}.$$

Ускорение пылинки под действием этой силы составит

$$a = \frac{3F}{4\pi\rho r^3} = \frac{\ln 10}{5} \cdot \frac{3\sigma T^4 \cdot \Delta m}{c\rho r}\sin\frac{2\pi t}{\tau} = a_0 \sin\omega t.$$

Угловая скорость, соответствующая колебаниям, есть $\omega = 2\pi/\tau$. Искомая длина отрезка есть удвоенная амплитуда колебаний:

$$d = \frac{2a_0}{\omega^2} = \frac{\ln 10}{5} \cdot \frac{6\sigma T^4 \cdot \Delta m \tau^2}{4\pi^2 c\rho r} = \frac{3\ln 10 \cdot \Delta m}{10\pi^2} \cdot \frac{\sigma T^4 \cdot \tau^2}{c\rho r}.$$

Обратим внимание, что в итоговое выражение не входит расстояние от пылинки до звезды R.

4. Система оценивания. Оценка является суммой двух основных составляющих – качество решения и ответа. Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 10 баллов.

Часть 1 – Качество решения (5 баллов).

Этап 1 – 1 балл. Правильное выражение для средней силы светового давления, действующей на пылинку (на расстоянии R)

Этап 2 – 1 балл. Правильная связь выражения силы светового давления через температуру пылинки, при которой исчезает зависимость от расстояния до звезды R.

Этап 3 – 1 балл. Выражение для изменения светового потока от звезды как функции времени.

Этап 4 – 1 балл. Выражение для равнодействующей сил светового давления и притяжения к звезде, которая оказывается синусоидальной функцией времени и определяется только заданными в условии величинами.

Этап 5 – 1 балл. Выражение для длины отрезка как удвоенной амплитуды гармонических колебаний пылинки под действуем синусоидальной силы.

Часть 2 – Качество ответа (5 баллов).

0 баллов: ответ отсутствует, либо размерность выражения ответа не соответствует искомой величине (длина отрезка), вне зависимости от вызвавшей это ошибки. То же относится к случаю, если в выражении ответа производится сложение или вычитание величин разных размерностей.

1 балл: ответ записан и соответствует требуемой размерности. Однако его отношение к правильному ответу является безразмерной комбинацией размерных параметров, заданных в условии (например, отношение ответов равно r/R, $r/c\tau$ или Δm в ненулевой степени). То же относится к любому варианту, если ответ содержит величину R или величину, не заданную в условии задания (например, массу звезды M).

2 балла: ответ записан, соответствует требуемой размерности, все размерные величины и величина Δm присутствуют в нем в правильной степени. Численный коэффициент отличается от верного в большую или меньшую сторону более чем в 4 раза.

3 балла: ответ записан, соответствует требуемой размерности, все размерные величины присутствуют в нем в правильной степени. Численный коэффициент отличается от верного в большую и меньшую сторону не более чем в 4 раза.

4 балла: ответ записан, соответствует требуемой размерности. Он может быть сведен к правильному при корректном учете всех упрощений, сделанных в условии задачи. В ответе могут присутствовать лишние факторы и слагаемые, которые исчезают при правильных преобразованиях и использовании допущений. К этому же случаю относится запись ответа с не заданными в условии величинами (например, частота колебаний ω), которые описываются в отдельных формулах (неоптимальная запись ответа).

5 баллов: ответ полностью соответствует верному, либо получается из него путем элементарных однозначных преобразований (без учета допущений).

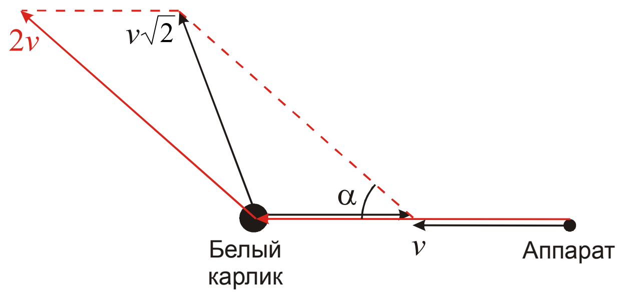
11.5. ЧУДЕСНОЕ СПАСЕНИЕ *(Д.Е. Козлов)*

5. Условие. Белый карлик массы m обращается по круговой орбите радиуса R вокруг сверхмассивной черной дыры массы M. Космический аппарат в результате неудачных действий экипажа также оказался на круговой орбите вокруг этой черной дыры. Он движется в той же плоскости и почти по той же траектории, что и белый карлик, но в противоположном направлении, и не имеет запасов топлива. При какой максимальной разнице радиусов орбит аппарата и белого карлика ΔR после их первой встречи аппарат улетит от сверхмассивной черной дыры?

При решении считать, что $m \ll M$, $\Delta R \ll R$, сама величина R значительно больше гравитационного радиуса черной дыры, размерами белого карлика и релятивистскими эффектами пренебречь.

5. Решение. Перед сближением белый карлик и аппарат движутся навстречу друг другу с практически одинаковыми скоростями:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

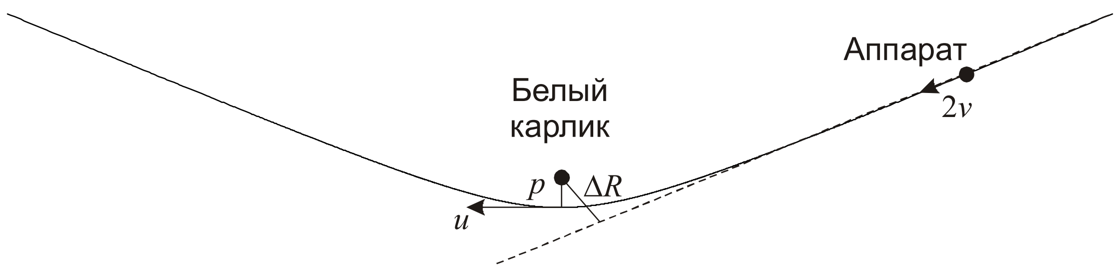


В системе отсчета, двигающейся в этот момент с белым карликом, скорость аппарата составляет $2v$. Такой же по модулю она будет после сближения, но ее направление изменится на угол α. Чтобы аппарат покинул окрестности сверхмассивной черной дыры, его скорость в системе отсчета, связанной с черной дырой, должна быть равна второй космической, $v\sqrt{2}$. Угол поворота скорости аппарата в системе отсчета белого карлика можно определить из теоремы косинусов:

$$2v^2 = v^2 + 4v^2 - 4v^2\cos\alpha; \quad \cos\alpha = \frac{3}{4}.$$

Траектория аппарата относительно белого карлика представляет собой гиперболу с эксцентриситетом

$$e = \frac{1}{\sin(\alpha/2)} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}} = 2\sqrt{2}.$$



Обозначим минимальное расстояние между аппаратом и белым карликом как p, а его скорость относительно белого карлика как u. Учитывая, что на удалении от белого карлика скорость аппарата была равна $2v$, из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{(2v)^2}{2} + \frac{Gm}{p} = \frac{u^2}{2}.$$

С другой стороны, из свойств гиперболического движения

$$u^2 = \frac{Gm}{p}(1+e).$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем

$$2v^2 + \frac{Gm}{p} = \frac{Gm}{2p}(1+e).$$

Отсюда мы получаем выражение для минимального расстояния между аппаратом и белым карликом:

$$p = \frac{Gm}{v^2} \cdot \frac{e-1}{4} = R\frac{m}{M} \cdot \frac{e-1}{4}.$$

Для скорости аппарата относительно белого карлика имеем:

$$u^2 = \frac{Gm}{p}(1+e) = \frac{4GM}{R} \cdot \frac{e+1}{e-1}; \quad u = 2v\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}.$$

Расстояние между линией – продолжением скорости аппарата на бесконечности и белым карликом есть искомая разность радиусов орбит ΔR. По закону сохранения момента импульса:

$$2v \cdot \Delta R = u \cdot p; \quad \Delta R = \frac{u \cdot p}{2v} = p\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = \frac{R}{4} \cdot \frac{m}{M}\sqrt{e^2-1} = \frac{R\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{m}{M}.$$

Корабль фактически выполняет пассивный гравитационный маневр, используя белый карлик для выхода из поля тяготения сверхмассивной черной дыры.

5. Система оценивания. Оценка за задание образуется из двух составляющих – качество решения и качество ответа, по 5 баллов за каждую часть. Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, описанные в части 1, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 10 баллов.

Часть 1 – качество решения (5 баллов).

Этап 1 – 1 балл. Связь условия вылета аппарата из системы (вторая космическая скорость в системе отсчета черной дыры) с углом поворота аппарата в системе отсчета белого карлика.

Этап 2 – 1 балл. Связь угла поворота с эксцентриситетом гиперболической орбиты, выражение для эксцентриситета.

Этап 3 – 1 балл. Выражение для перицентрического расстояния аппарата.

Этап 4 – 1 балл. Связь перицентрического расстояния со скоростью на удалении и массой белого карлика.

Этап 5 – 1 балл. Выражение для «прицельного параметра» гиперболы через закон сохранения момента импульса.

Часть 2 – Качество ответа (5 баллов).

0 баллов – ответ отсутствует, либо размерность выражения ответа не соответствует искомой величине (расстояние), вне зависимости от вызвавшей это ошибки. То же относится к случаю, если в выражении ответа производится сложение или вычитание величин разных размерностей.

1 балл – ответ записан и соответствует требуемой размерности. Однако его отношение к правильному ответу является безразмерной комбинацией размерных параметров, заданных в условии (вероятнее всего – отношению масс m/M ненулевой степени). То же относится к любому варианту, если ответ содержит величину, не заданную в условии задания.

2 балла – ответ записан, соответствует требуемой размерности, все размерные величины и присутствуют в нем в правильной степени. Численный коэффициент отличается от верного в большую или меньшую сторону более чем в 2 раза.

3 балла – ответ записан, соответствует требуемой размерности, все размерные величины присутствуют в нем в правильной степени. Численный коэффициент отличается от верного в большую и меньшую сторону не более чем в 2 раза.

Примечание: коэффициент $7^{1/2}/4$, содержащийся в ответе, численно близок к 2/3. Если участник записывает коэффициент в виде десятичной дроби (0.66), необходимо проверить, как этот коэффициент получен. Ответ с коэффициентом 2/3, вне зависимости от формы его записи, правильным не является.

4 балла – ответ записан, соответствует требуемой размерности. Он может быть сведен к правильному при корректном учете всех упрощений, сделанных в условии задачи. В ответе могут присутствовать лишние факторы и слагаемые, которые исчезают при правильных преобразованиях и использовании допущений. К этому же случаю относится запись ответа с не заданными в условии величинами (например, перицентрическая скорость u), которые описываются в отдельных формулах (неоптимальная запись ответа).

5 баллов – ответ полностью соответствует верному, либо получается из него путем элементарных однозначных преобразований (без учета допущений).

11.6. МНОЖЕСТВО МИРОВ *(О.С. Угольников)*

6. Условие. Предположим, мы оказались внутри крупной системы из большого числа звезд главной последовательности. Вокруг каждой звезды по круговой орбите с радиусом l движется по одной планете с радиусом r, все планеты одинаковы. Большая сеть одинаковых наземных телескопов на разных широтах Земли провела длительную серию измерений всех доступных им звезд, проницающая способность телескопа (болометрическая звездная величина) равна m. Приборы позволяют фиксировать относительное изменение яркости звезды $\Delta J/J$, не меньшее фиксированной величины $\eta << 1$. Планеты существенно меньше звезд по размерам и массе, оси орбит планет ориентированы в пространстве хаотично.

Звезды в пределах возможности наблюдения телескопов расположены однородно, объемная концентрация звезд с массами от M до $M+dM$ соответствует функции Солпитера $dn = n_0(M/M_0)^{-\alpha}dM/M_0$. Для этих звезд выполняется соотношение «масса – светимость» $(L/L_0) = (M/M_0)^4$ и «масса – радиус» $(R/R_0) = (M/M_0)$. Индекс «0» в этих случаях соответствует Солнцу. Минимальная масса звезды равна M_M. Все характеристики Солнца (R_0, M_0, абсолютная болометрическая звездная величина m_0) заданы. Межзвездным и атмосферным поглощением света, потемнением звезд к краю пренебречь. Звезды не экранируют друг друга. Определите полное число открытых планет.

6. Решение. В условии задания сказано, что наблюдения были длительными, поэтому мы можем считать, что они больше орбитального периода планет, и мы обязательно зафиксируем транзит, если он произойдет.

Определим для начала максимальное расстояние до звезды солнечного типа, чтобы эта звезда попала в обзор, выразив его в парсеках:

$$\lg D_0 = 1 + \frac{m - m_0}{5}; \quad D_0 = 10^{1+0.2(m-m_0)}.$$

Для простоты дальнейших формул мы будем использовать эту величину, как заданную. Возьмем теперь звезду с массой M. Максимально возможное расстояние до этой звезды, чтобы она попала в обзор, равно

$$D = D_0\sqrt{\frac{L}{L_0}} = D_0\left(\frac{M}{M_0}\right)^2.$$

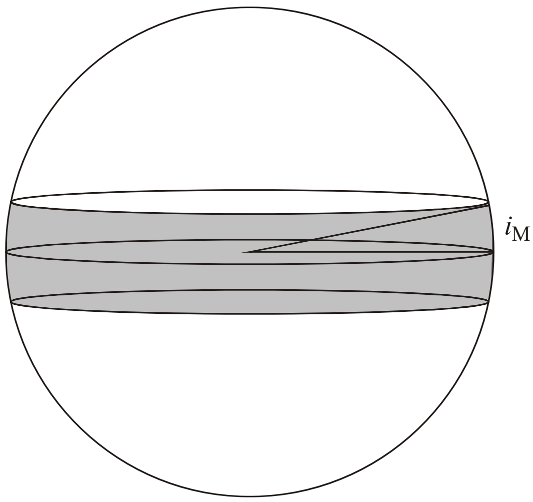
Общее количество звезд с массой от M до $M+dM$, попавших в обзор, есть их концентрация, умноженная на объем шара с радиусом D:

$$dN_T = n_0\left(\frac{M}{M_0}\right)^{-\alpha} \cdot \frac{4\pi}{3}D_0^3 \cdot \left(\frac{M}{M_0}\right)^6 \cdot \frac{dM}{M_0} = \frac{4\pi n_0 D_0^3 dM}{3M_0}\left(\frac{M}{M_0}\right)^{6-\alpha}.$$

По условию задачи, у каждой из этих звезд есть планета на расстоянии r. Но не каждую из них мы можем заметить. Пусть угол между плоскостью орбиты и и лучом зрения – i. Тогда, с учетом малости размеров планеты, мы можем записать условие наступления транзита:

$$l\,|\sin i| \le R; \quad |\sin i| \le R/l.$$

Рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в положении звезды и осью, направленной к наблюдателю. Ось вращения может быть направлена в любую точку этой сферы, и если она окажется рядом с экватором в этой системе, то может наблюдаться транзит. Вероятность этого события будет равна отношению площади сегмента вокруг экватора этой сферы с толщиной $2i_{\rm M}$ к площади всей сферы:



$$P = \frac{4\pi \sin i_{\rm M}}{4\pi} = \sin i_{\rm M} = \frac{R}{l} = \frac{R_0}{l} \cdot \frac{M}{M_0}.$$

Теперь мы можем определить количество звезд в интервале масс от M до $M+dM$, у которых удастся обнаружить планеты:

$$dN = dN_{\rm T} P = \frac{4\pi n_0 D_0^3 R_0 dM}{3l \cdot M_0} \left(\frac{M}{M_0} \right)^{7-\alpha}.$$

Нам остается проинтегрировать этот ответ по всем возможным значениям масс. Минимальная масса нам известна, она равна $M_{\rm M}$. Максимальная масса $M_{\rm H}$ будет соответствовать такому радиусу звезды $R_{\rm H}$, при котором планета вызовет транзит на пределе возможностей обнаружения приборами:

$$\eta = \frac{r^2}{R_{\rm H}^2}; \quad M_{\rm H} = M_0 \frac{R_{\rm H}}{R_0} = M_0 \frac{r}{R_0 \sqrt{\eta}}.$$

При реальных значениях α (от 2 до 3) величина $(7-\alpha)$ положительна, и мы можем записать итоговый ответ:

$$N = \frac{4\pi n_0 D_0^3 R_0}{3l \cdot M_0^{8-\alpha}} \int_{M_{\rm M}}^{M_{\rm H}} M^{7-\alpha} dM = \frac{4\pi n_0 D_0^3 R_0}{3(8-\alpha)\, l} \left[\frac{r^{8-\alpha}}{R_0^{8-\alpha} \eta^{4-\alpha/2}} - \frac{M_{\rm M}^{8-\alpha}}{M_0^{8-\alpha}} \right].$$

Если учесть, что в настоящее время точность фотометрических измерений η достаточно высока, и планеты обнаруживаются у звезд с массой, существенно большей $M_{\rm M}$, то с учетом высокого показателя степени $(8-\alpha)$ второе слагаемое несравнимо меньше первого, и мы можем записать упрощенный вид ответа:

$$N = \frac{4\pi n_0 D_0^3 r^{8-\alpha}}{3(8-\alpha)\, l R_0^{7-\alpha} \eta^{4-\alpha/2}}, \quad D_0 = 10^{1+0.2(m-m_0)} \text{ пк}.$$

Обратим внимание, что в таком приближении из ответа выпадает масса Солнца M_0.

6. Система оценивания. Оценка за решение образуется из двух составляющих – качество решения и качество ответа (6 и 4 балла соответственно). Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 10 баллов.

Часть 1 – качество решения (6 баллов).

Этап 1 – 1 балл. Вывод соотношения для максимального расстояния до звезды солнечного типа.

Этап 2 – 1 балл. Вывод соотношения для максимального расстояния до звезды произвольной массы (либо радиуса).

Этап 3 – 1 балл. Вывод соотношения для вероятности обнаружения экзопланеты у звезды произвольной массы (либо радиуса).

Этап 4 – 1 балл. Вывод соотношения для числа открытых экзопланет у звезд произвольной массы (либо радиуса).

Этап 5 – 1 балл. Вывод выражения для максимальной массы (либо радиуса) звезды, у которой может наблюдаться транзит.

Этап 6 – 1 балл. Интегрирование полученных соотношений по всем возможным массам (либо радиусам) звезд.

Часть 2 – качество ответа (4 балла).

0 баллов: ответ не записан либо не является безразмерным. При проверке размерности нужно иметь ввиду, что величина D_0 может быть записана в виде выражения формулы Погсона, и вместо нее может стоять некоторое число, выраженное в парсеках, то есть являющееся размерным.

1 балл: ответ записан, является безразмерным, его отношение к правильному является безразмерной комбинацией размерных величин, заданных в условии (например r/R_0 в ненулевой степени). То же относится к варианту, содержащему массу Солнца M_0 в большем из двух слагаемых (соответствующих верхней границе массы звезд, у которых будут найдены планеты).

2 балла: ответ записан, является безразмерным и отличается от правильного в большую или меньшую сторону более чем 4 раза, не связанной с заданными в условии размерными величинами. Запись или пропуск второго слагаемого в ответе не влияет на оценку.

3 балла: ответ записан, является безразмерным и отличается от правильного в большую или меньшую сторону в 4 раза или менее, не связанной с заданными в условии размерными величинами. Запись или пропуск второго слагаемого в ответе не влияет на оценку.

4 балла: правильный ответ. Второе слагаемое в нем, связанное с минимальной массой звезды, может быть записано либо опущено, что не влияет на оценку. Участник может также отдельно оговорить случай, при котором максимальная масса M_H оказывается меньше M_M, и тогда число открытых планет равно нулю.

Примечание: участник может вместо величины α подставить ее реальное значение (около 2.35) и тем самым получить единый численный коэффициент $(4/(3(8–\alpha))=0.236)$, что на оценку не влияет.

Возможная ошибка участника: рассмотрение случая $\alpha \geq 8$, что явно не соответствует функции Солпитера распределения звезд по массам. Это не влияет на оценку, если подобное рассмотрение производится наряду с правильным вариантом $\alpha<8$, и записаны оба ответа. Если же правильный вариант не рассматривается, качество ответа оценивается не выше 2 баллов.