

10 класс

Первый день

- 10.1. Пусть p и q — различные простые числа. Дана бесконечная убывающая арифметическая прогрессия, в которой встречается каждое из чисел p^{23} , p^{24} , q^{23} и q^{24} . Докажите, что в этой прогрессии обязательно встретятся числа p и q .
- 10.2. Дано нечётное число $n \geq 3$. В клетчатом квадрате $2n \times 2n$ закрашивают $2(n-1)^2$ клеток. Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно гарантированно вырезать из незакрашенной клетчатой фигуры?
- 10.3. Дано натуральное число n . Илья задумал пару различных многочленов степени n (с вещественными коэффициентами), аналогично Саша задумал пару различных многочленов степени n . Лёня знает n ; его цель — выяснить, одинаковые ли пары многочленов у Ильи и Саши. Лёня выбирает набор из k вещественных чисел $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ и сообщает эти числа. В ответ Илья заполняет таблицу $2 \times k$: для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ он вписывает в две клетки i -го столбца пару чисел $P(x_i), Q(x_i)$ (в любом из двух возможных порядков), где P и Q — задуманные им многочлены. Аналогичную таблицу заполняет Саша. При каком наименьшем k Лёня сможет (глядя на таблицы) наверняка добиться цели?
- 10.4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle D = 90^\circ$, его диагонали пересекаются в точке E . Прямая ℓ пересекает отрезки AB , CD , AE и ED в точках X , Y , Z и T соответственно. Известно, что $AZ = CE$ и $BE = DT$. Докажите, что длина отрезка XY не больше диаметра описанной окружности треугольника ETZ .