10 класс

Второй день

10.5. Дана прямолинейная дорога, выложенная из зелёных и красных дощечек (дорога — отрезок, разбитый на отрезки-дощечки). Цвета дощечек чередуются; первая и последняя дощечки — зелёные. Известно, что длины всех дощечек больше сантиметра и меньше метра, а также что длина каждой следующей дощечки больше предыдущей. Кузнечик хочет пропрыгать вперёд по дороге по этим дощечкам, наступив на каждую зелёную дощечку хотя бы один раз и не наступив ни на одну красную дощечку (или границу между соседними дощечками). Докажите, что кузнечик может сделать это так, чтобы среди длин его прыжков встретилось не более 8 различных значений.

10.6. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина дуги ABC окружности, описанной около треугольника ABC. На отрезке AD отмечена точка E, а на отрезке CD — точка F. Известно, что $ME = MD = MF$. Докажите, что точки B, M, E и F лежат на одной окружности.

10.7. Пусть даны натуральные числа x_1 и x_2. На прямой даны y_1 белых отрезков и y_2 чёрных отрезков, при этом $y_1 \geqslant x_1$ и $y_2 \geqslant x_2$. Известно, что никакие два отрезка одного цвета не пересекаются (даже не имеют общих концов). Также известно, что при любом выборе x_1 белых отрезков и x_2 чёрных отрезков обязательно какая-то пара выбранных отрезков будет пересекаться. Докажите, что

$$(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) < x_1 x_2.$$

10.8. Дано натуральное $n > 2$. Маша записывает по кругу n натуральных чисел. Далее Тая делает такую операцию: между каждыми двумя соседними числами a и b она пишет некоторый делитель числа $a + b$, больший 1; затем Тая стирает исходные числа и получает новый набор из n чисел, стоящих по кругу. Всегда ли Тая может выполнять операции таким образом, чтобы через несколько операций все числа оказались равными?