

Материалы для проведения  
регионального этапа  
50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Первый день

31 января – 1 февраля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения III этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храпцов.

А также: М. А. Дидин, В. Б. Мокин, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, Г. Р. Челноков, Л. М. Шатунов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.



## ВВЕДЕНИЕ

**Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года.**

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2024 г.** (I тур) и **1 февраля 2024 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временными регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2023–2024 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

◆

*Желаем успешной работы!*

*Авторы и составители сборника*

## 10 класс

- 10.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров  $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times 2024$  (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1? (О. Подлипский)

**Ответ.** Не может.

**Решение.** Предположим противное, и пусть  $n > 1$  — наибольшая из длин выбранных прямоугольников. Тогда составлен клетчатый квадрат  $k \times k$ , где  $k \geq n > 1$ . Значит, его площадь не менее  $n^2$ . С другой стороны, его площадь не больше, чем суммарная площадь всех прямоугольников  $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times n$ , т.е. не больше  $1 + 2 + 3 + \dots + n < n^2$ . Противоречие.

**Замечание.** Расположив в квадрате  $n \times n$  прямоугольники  $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times n$  «лесенкой» можно увидеть без вычислений, что их суммарная площадь меньше площади всего квадрата.

**Комментарий.** Только ответ «не может» — 0 баллов.

Только идея рассмотреть самый длинный из использованных прямоугольников (длины  $n$ ) — 1 балл.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что площадь, покрытая остальными использованными прямоугольниками, должна быть не меньше, чем  $n(n - 1)$  (или эквивалентное утверждение, например, что площадь всего квадрата должна быть не меньше, чем  $n^2$ ), без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников не превосходит  $n(n + 1)/2$ , без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и явно сказано, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников меньше  $n^2$  — не менее 6 баллов.

Баллы, перечисленные выше, не суммируются друг с другом.

Если во в целом верном решении рассмотрен лишь случай квадрата со стороной  $n$  ( $a$  не больше) — снимается 1 балл.

- 10.2. На координатной плоскости нарисована парабола  $y = x^2$ . Для данного числа  $k > 0$  рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно  $k$ . Докажите, что продолжения боковых сторон всех таких трапеций проходят через одну точку.

(Н. Агаханов)

**Решение.** Пусть  $ABCD$  — одна из рассматриваемых трапеций,  $AD \parallel BC \parallel Ox$  (см. рис. 6). Пусть точки  $A$  и  $B$  имеют координаты  $(a, a^2)$  и  $(b, b^2)$ .

Легко получить уравнение прямой  $AB$ :  $(b^2 - a^2)x - (b - a)y + (ba^2 - ab^2) = 0$ , что после сокращения на  $b - a \neq 0$  превращается в  $y = (a + b)x - ab$ . Но  $ab$  равно произведению половин оснований трапеции (это произведение расстояний от  $A$  и  $B$  до оси  $Oy$ ). Отсюда  $ab = \frac{k^2}{4}$ . Следовательно, прямая  $AB$  проходит через фиксированную точку  $(0, -\frac{k^2}{4})$ .

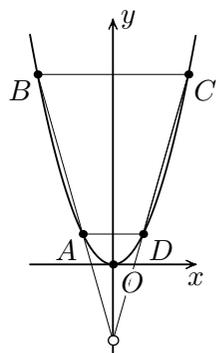


Рис. 6

**Замечание.** Конечно, утверждение задачи верно для любой параболы ( $a$  не только для  $y = x^2$ ).

**Комментарий.** Верно указана общая точка продолжений боковых сторон, но не доказано, что через нее они в самом деле проходят — 2 балла.

Задача решена при рассмотрении только одного из двух аналогичных случаев расположения точек (скажем,  $a > 0$  разобран, а  $a < 0$  — нет) — баллы не снимаются.

Ошибка в арифметике, не повлиявшая на ход решения — снимаются 2 балла.

- 10.3. По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря — чтобы ока-

залось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори? (П. Кожевников)

**Ответ.** 50.

**Решение.** Нужно показать, что Аня всегда может добиться, чтобы разноцветных пар было не меньше 50, а Боря сможет помешать ей добиться, чтобы таких пар было больше 50.

**Первый способ.** *Стратегия Ани.* Первым ходом Аня красит в любой цвет любую точку, а дальше каждым ходом выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной (такая, очевидно, найдётся), и красит непокрашенную точку в цвет, отличный от цвета покрашенной. При этом образуется новая пара соседних разноцветных точек.

*Стратегия Бори.* Каждым ходом Боря выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной, и красит непокрашенную точку в цвет, совпадающий с цветом покрашенной. При этом образуется новая пара соседних одноцветных точек.

*Обоснование правильности стратегий.* Всего в круге имеется 100 пар соседних точек, и каждый игрок делает за игру по 50 ходов. Сделав свои ходы, Боря добьётся того, что из этих 100 пар хотя бы 50 будут одноцветными, а Аня — что хотя бы 49 из них будут разноцветными. Однако заметим, что количество разноцветных пар всегда чётно. Действительно, после окончания игры пройдём полный круг, начиная с какой-то отмеченной точки (пусть для определённости с красной). Группы из идущих подряд красных и синих точек при этом будут чередоваться: К—С—К—С—...—К, и значит, встретим пар разноцветных соседей вида К—С столько же, сколько пар вида С—К. Поэтому если пар разноцветных соседних точек не меньше 49, то их хотя бы 50.

**Второй способ.** Разобьём все отмеченные точки на 50 пар соседей:  $P_1, P_2, \dots, P_{50}$ .

*Стратегия Бори.* Если своим ходом Аня красит точку в паре  $P_i$ , то Боря ответным ходом красит вторую точку в паре  $P_i$  в тот же цвет. Ясно, что при такой игре Бори в конце игры каждая пара  $P_i$  будет покрашена в один цвет. Значит, из 100

пар соседних точек не менее 50 будут одноцветными. Поэтому разноцветных пар будет не больше, чем  $100 - 50 = 50$ .

*Стратегия Ани.* Аня будет добиваться того, чтобы в каждой паре  $P_i$  с нечётным номером  $i$  она покрасила одну из точек красным, а в каждой паре  $P_i$  с чётным номером  $i$  — синим. Если у Ани это получится, то покрашенные ею 50 точек разобьют окружность на 50 дуг с разноцветными концами. На каждой из этих дуг, очевидно, найдётся хотя бы одна пара разноцветных соседних отмеченных точек (в частности, если на дуге нет отмеченных Борей точек, такую пару образуют концы дуги).

Покажем, как Аня может реализовать этот план. Первым ходом она красит одну из точек в какой-то паре  $P_i$  соответствующим цветом. Далее, если Боря отвечает ходом в ту же пару, то Аня красит одну из точек в любой ещё не покрашенной паре, иначе она красит вторую точку в паре, в которой только что покрасил точку Боря. В результате после каждого хода Ани будет ровно одна пара  $P_j$ , в которой одна точка покрашена Аней, а другая не покрашена, а в каждой из остальных пар  $P_i$  будет либо две покрашенные точки, ровно одна из которых покрашена Аней, либо ни одной покрашенной точки. Значит, в конце игры Аней будет покрашено ровно по одной точке в каждой паре  $P_i$ , что ей и требовалось.

### **Комментарий.**

Только ответ — 0 баллов.

1) Предъявлена верная стратегия за Борю, гарантирующая, что число разноцветных пар не больше 50 — 2 балла.

1') Обосновано, что эта Борина стратегия работает — 1 балл.

2) Предъявлена верная стратегия за Аню, гарантирующая, что число разноцветных пар не меньше 50 — 2 балла.

2') Обосновано, что эта Анина стратегия работает — 2 балла (если при верной Аниной стратегии обосновано лишь, что она может обеспечить себе 49 пар, то считается, что обоснование отсутствует, и эти баллы не ставятся).

Баллы за указанные продвижения суммируются. Если предъявленная стратегия за одного из игроков не работает хотя бы в одном частном случае развития игры, такая стратегия признается не работающей и оценивается в 0 баллов.

- 10.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500. (С. Берлов)

**Решение.** Сумма всех чисел ряда, кроме числа 500, равна  $(1 + 2 + 3 + \dots + 1000) - 500 > 2 \cdot 100000$ , поэтому сумма чисел с какой-то из сторон от числа 500 больше 100000, пусть для определённости справа.

Пусть справа от 500 стоят (слева направо) числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Обозначим  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ; выберем наименьшее  $n$ , для которого  $S_n > 100000$ , так что  $S_n > 100000 \geq S_{n-1}$ . Если  $S_n \leq 100500$ , то мы уже нашли желаемую группу чисел.

Пусть теперь  $S_n > 100500$ . Докажем, что тогда нам подходит сумма  $500 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 500 + S_{n-1}$ . Действительно, поскольку  $a_n \leq 1000$ , имеем  $500 + S_{n-1} = 500 + S_n - a_n > 500 + 100500 - 1000 = 100000$ . С другой стороны,  $500 + S_{n-1} \leq 500 + 100000 = 100500$ , что и требовалось.

**Комментарий.** Алгоритм выбора нужного отрезка чисел, который не работает хотя бы для одной перестановки чисел от 1 до 1000, признается не работающим и оценивается в 0 баллов.

В случае верного алгоритма выбора нужного отрезка оценка может быть снижена на 1, 2 или 3 балла, за пробелы в обосновании того, что алгоритм действительно работающий.

- 10.5. Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  перпендикулярны и пересекаются в точке  $O$ . Центры вписанных окружностей треугольников  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$  являются вершинами выпуклого четырёхугольника, периметр которого равен  $P$ . Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOA$  не превосходит  $\frac{P}{2}$ .

(С. Берлов)

**Решение.** В прямоугольном треугольнике  $AOB$  радиус вписанной окружности равен  $\frac{1}{2}(OA + OB - AB)$  (что также равно расстоянию от вершины прямого угла до точки касания катета со вписанной окружностью). Складывая это равенство с аналогичными для треугольников  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOA$ , получа-

ем, что сумма  $S$  радиусов вписанных окружностей треугольников  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOA$  равна

$$\frac{1}{2}(2(OA + OB + OC + OD) - P_{ABCD}) = AC + BD - \frac{P_{ABCD}}{2}.$$

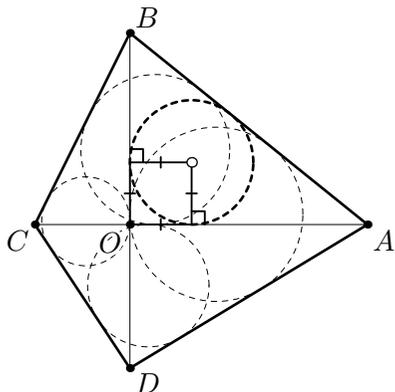


Рис. 7

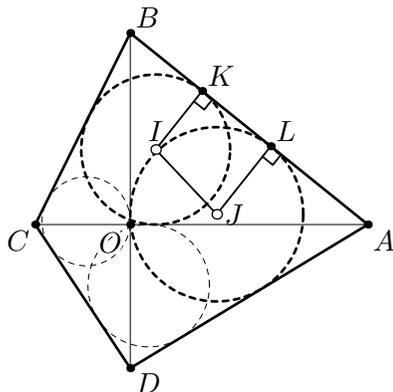


Рис. 8

Пусть вписанные окружности треугольников  $ABC$  и  $DAB$  имеют центры  $I$ ,  $J$  и касаются стороны  $AB$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Поскольку  $KL$  — проекция  $IJ$  на прямую  $AB$ , имеем  $IJ \geq KL = AK - AL = \frac{1}{2}(AC + AB - BC) - \frac{1}{2}(AD + AB - BD) = \frac{1}{2}(AC + BD - BC - AD)$ . Сложим это неравенство с аналогичными для расстояний между другими парами центров вписанных окружностей треугольников  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ . Получим оценку на периметр  $P$ :  $P \geq \frac{1}{2}(4AC + 4BD - 2P_{ABCD})$ . Сравнивая с выражением  $S$ , получаем требуемое неравенство  $P \geq 2S$ .

**Замечание.** Неравенство может обращаться в равенство (например, в случае прямоугольника  $ABCD$ ). Из решения видно, что это происходит в том случае, когда  $IJ \parallel AB$  и выполнены аналогичные параллельности линии центров вписанных окружностей и сторон четырёхугольника  $ABCD$ .

**Комментарий.** Получено выражение для суммы радиусов  $S$  через диагонали и стороны исходного четырёхугольника — 1 балл.

Идея оценить расстояние  $IJ$  проекцией на сторону  $AB$  — 1 балл.

Баллы за указанные продвижения суммируются.

За отсутствие обоснования того, что в выпуклом четырехугольнике, образованном центрами вписанных окружностей треугольников  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ , вершины идут в перечисленном порядке, баллы не снимаются.