ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2024 г.
ПРИГЛАСИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. 7 КЛАСС
ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Максимальное количество баллов — 8

1. Замените буквы в дробях на числа от 1 до 5 так, чтобы значение каждой дроби было целым числом. Каждое число можно использовать только один раз.

$$\frac{8}{A} \quad \frac{9}{B} \quad \frac{10}{C} \quad \frac{6}{D} \quad \frac{7}{E}$$

Постройте соответствие.

• Вместо A надо поставить
• Вместо B надо поставить
• Вместо C надо поставить
• Вместо D надо поставить
• Вместо E надо поставить

• число 1.
• число 2.
• число 3.
• число 4.
• число 5.

Ответ: A — 4, B — 3, C — 5, D — 2, E — 1.
Решение.
Заметим, что 7 делится среди перечисленных чисел только на 1, поэтому вместо буквы E поставим единицу:

$$\frac{8}{A} \quad \frac{9}{B} \quad \frac{10}{C} \quad \frac{6}{D} \quad \frac{7}{1}$$

Теперь поймём, куда можно поставить числа 4 и 5. Единственное число, которое делится на 4, — это 8, а единственное число, которое делится на 5, — это 10:

$$\frac{8}{4} \quad \frac{9}{B} \quad \frac{10}{5} \quad \frac{6}{D} \quad \frac{7}{1}$$

Осталось лишь понять, где будет стоять число 2, а где — 3. Из оставшихся чисел только 6 делится на 2, поэтому искомая конструкция определяется однозначно:

$$\frac{8}{4} \quad \frac{9}{3} \quad \frac{10}{5} \quad \frac{6}{2} \quad \frac{7}{1}$$

2. У Лёни есть несколько пятирублёвых и несколько десятирублёвых монет. Он хочет купить как можно больше пицц в школьной столовой. После долгих вычислений Лёня заметил, что с помощью всех своих пятирублёвых монет и ещё 40 рублей он может купить ровно 4 пиццы без сдачи, а с помощью всех своих десятирублёвых монет и ещё 50 рублей он может купить ровно 5 пицц без сдачи. При этом у Лёни хватает денег на 6 пицц без сдачи. Сколько рублей стоит одна пицца?
Ответ: 30.

Решение.
Пусть у Лёни есть x пятирублёвых монет и y десятирублёвых монет, а стоимость одной пиццы составляет P рублей.

• Из первой части условия мы получаем, что $5x + 40 = 4P$, то есть $5x = 4P - 40$.
• Из второй части условия мы получаем, что $10y + 50 = 5P$, то есть $10y = 5P - 50$.

Сложив эти равенства, мы получим
$$5x + 10y = (4P - 40) + (5P - 50) = 9P - 90,$$
а по условию задачи это равно $6P$. Получаем и решаем соответствующее уравнение:
$$9P - 90 = 6P,$$
$$3P = 90,\ P = 30.$$

3. Друзья Алексей, Василий и Сергей смотрели матч по мини-футболу. После окончания матча они сказали следующее.

• Алексей: «Первая команда забила 17 голов. А вторая — больше 14».
• Василий: «Первая команда забила больше 18 голов. А вторая — не больше 14».
• Сергей: «Первая команда забила меньше 20 голов. А вторая — ровно 14».

Оказалось, что ровно один из друзей оба раза ошибся, а двое других оба раза сказали правду. Сколько голов забила каждая команда?
Ответ: 19 : 14.

Решение.
Заметим, что утверждение, которое сделал Алексей о количестве голов второй команды («больше 14»), противоречит и утверждению Василия («не больше 14»), и утверждению Сергея («ровно 14»). Получается, что если Алексей сказал правду, то и Василий, и Сергей ошиблись, а это невозможно. Следовательно, Алексей ошибся, а Василий и Сергей сказали правду.
Со слов Василия мы знаем, что первая команда забила больше 18 голов, а со слов Сергея — что меньше 20 голов. Значит, первая команда забила в точности 19 голов.

Теперь подумаем про результат второй команды. Со слов Сергея мы знаем, что эта команда забила в точности 14 голов, и это не противоречит словам Василия.

Получается, что итоговый счёт — 19 : 14. Осталось лишь заметить, что Алексей в обоих своих утверждениях действительно ошибся.

4. Ваня придумал способ шифровать семизначные числа, состоящие из всех цифр от 1 до 7. Он придумал правило: для каждой цифры числа он записывает, сколько цифр справа от неё меньше, чем она сама, а затем убирает само число. Например, если бы у Вани было число 4567123, то он бы его зашифровал как 3333000.
Какое число было зашифровано с помощью последовательности цифр 4303200?
Ответ: 5417623.

Решение.
Для начала рассмотрим первую цифру. Справа от неё остается шесть других цифр, и она больше ровно четырёх из них. Таким образом, она является пятой по величине, и равна 5:

$$5 * * * * * *.$$

Вторая цифра больше трёх цифр из оставшихся шести (всех, кроме пятёрки), поэтому на втором месте стоит цифра 4:

$$5\,4 * * * * *.$$

Третья цифра не больше всех её соседей справа. Это может быть только цифра 1:

$$5\,4\,1 * * * *.$$

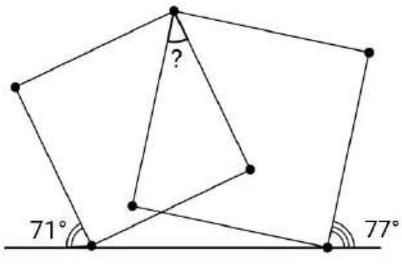
Пока не ясно, где стоят цифры 7, 6, 3, 2. Но четвертая цифра больше всех цифр, стоящих правее неё. То же самое справедливо и для пятой цифры. Поэтому на эти места мы ставим цифры 7 и 6 соответственно:

$$5\,4\,1\,7\,6 * *.$$

Предпоследняя цифра не больше последней, поэтому предпоследняя цифра равна 2, а последняя — 3:

$$5\,4\,1\,7\,6\,2\,3\,.$$

5. На рисунке изображены два квадрата. Сколько градусов составляет отмеченный угол?



Ответ: 32.
Решение.
Введём обозначения, как на рисунке. Начнём с того, что найдём градусные

меры углов треугольника AML:
- $\angle MAL$ = 180° − $\angle XAB - \angle BAD$ = 180° − 71° − 90° = 19°,
- $\angle MLA$ = 180° − $\angle KLY - \angle MLK$ = 180° − 77° − 90° = 13°,
- $\angle AML$ = 180° − $\angle MAL - \angle MLA$ = 180° − 19° − 13° = 148°.

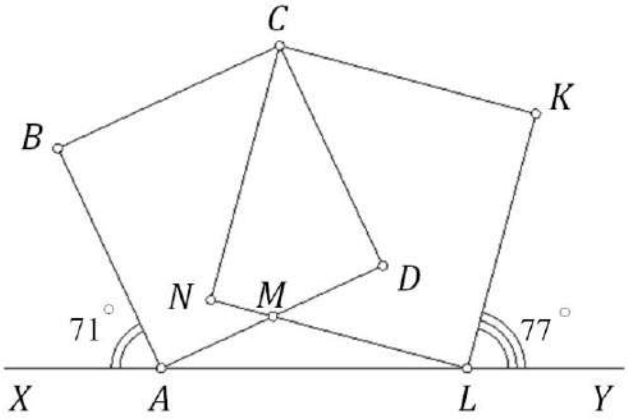


Рисунок к решению задачи 5.

Найдём градусную меру искомого угла, используя факт о том, что сумма углов любого четырёхугольника равна 360°:

$$\angle NCD = 360° - \angle CNM - \angle CDM - \angle NMD = 360° - 90° - 90° - \angle AML =$$
$$= 180° - 148° = 32°.$$

6. Алиса нарисовала на квадратном листе бумаги несколько горизонтальных и несколько вертикальных линий красного цвета, а Боря нарисовал на том же листе несколько горизонтальных и несколько вертикальных линий синего цвета (каждая из линий параллельна двум сторонам листа и пересекает две его другие стороны; каждый из ребят нарисовал не менее 1 вертикальной и не менее 1 горизонтальной прямой).
Известно, что если разрезать лист по красным линиям, то получится 39 кусочков, а если разрезать и по красным, ипосиним линиям, то получится 95 кусочков. Сколько кусочков получится, если разрезать лист бумаги только по синим линиям?
Ответ: 21.

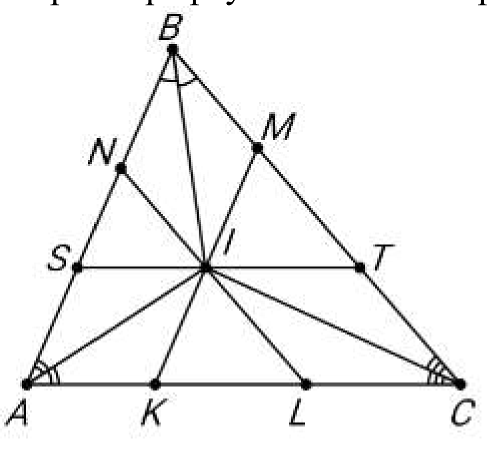
Решение.
Пусть горизонтальных красных линий было a, вертикальных красных — b, горизонтальных синих — c, вертикальных синих — d.
По условию, если разрезать лист по красным линиям, то получится 39 кусочков, то есть $(a + 1)(b + 1) = 39$, а если разрезать и по красным, и по синим линиям, то получится 95 кусочков, то есть $(a + c + 1)(b + d + 1) = 95$.
В силу того, что $a + 1 \geqslant 2$ и $b + 1 \geqslant 2$, а 39 можно представить в виде произведения двух чисел, больших единицы, единственным образом $39 = 3 \cdot 13$,

получаем, что числа a и b равны 2 и 12 в некотором порядке. Будем считать, что $a = 2$ и $b = 12$ (в случае, когда $a = 12$ и $b = 2$, всё аналогично).
Из равенства $(a + c + 1)(b + d + 1) = 95 = 5 \cdot 19$ аналогично получаем, что $a + c$ и $b + d$ равны 4 и 18 в некотором порядке. В силу того, что $b = 12$, число $b + d$ не может быть равно 4, поэтому $b + d = 18$. Тогда $d = 6$, а $a + c = 4$, то есть $c = 2$.
Таким образом, количество кусочков при разрезании только по синим линиям равняется $(c + 1)(d + 1) = 3 \cdot 7 = 21$.

7. Из 216 синих кубиков сложили большой куб 6×6×6. Затем его поверхность покрасили в белый цвет. Какое наибольшее количество кубиков (из этих 216) можно выложить в ряд так, чтобы любые два соседних кубика соприкасались синими гранями?
Ответ: 210.

Решение.
Заметим, что у всех кубиков в ряду, не считая двух крайних, какие-то две противоположные грани должны быть синими, а у двух крайних должно быть хотя бы по одной синей грани. При покраске куба $6 \times 6 \times 6$ только у 8 угловых кубиков не будет двух проти-воположных синих граней, поэтому из этих 8 кубиков можно использовать максимум 2, по краям ряда. Таким образом, кубиков в ряду не более $216 - 6 = 210$.
Осталось заметить, что 210 кубиков можно выстроить в ряд с соблюдением условия. Выстроим все не угловые кубики (очевидно, у всех них найдутся две противоположные синие грани) в ряд так, чтобы крайние грани ряда были синие, и с обоих краёв добавим по одному угловому кубику (приложив синей гранью).

8. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Через неё проведены прямые KM, LN, ST, параллельные AB, BC, AC соответственно. Причём точки K и L лежат на отрезке AC, точки S и N — на AB, точки M и T — на BC.
Найдите периметр треугольника IKL, если известно, что периметр SNI равен 8, периметр MTI равен 11, а периметр треугольника ABC равен 33.



Ответ: 14.

Решение.
Докажем, что периметр треугольника IKL (далее будем обозначать его P_{IKL}) равен длине AC.
Заметим, что $\angle SAI = \angle AIK$, так как это накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и KM и секущей AI. Получается, что $\angle KAI = \angle SAI = \angle AIK$, то есть треугольник AKI — равнобедренный, $AK = KI$. Аналогично можно доказать, что треугольник LIC — также равнобедренный, $LI = LC$. Значит, $P_{IKL} = IK + KL + LI = AK + KL + LC = AC$.

Аналогично можно получить, что $P_{ISN} = AB$ и $P_{IMT} = BC$.
Сложим все эти периметры: $P_{IKL} + P_{ISN} + P_{IMT} = AC + AB + BC = P_{ABC} = 33$.
Теперь уже легко найти искомую величину:
$P_{IKL} = 33 - P_{ISN} - P_{IMT} = 33 - 8 - 11 = 14$.