

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

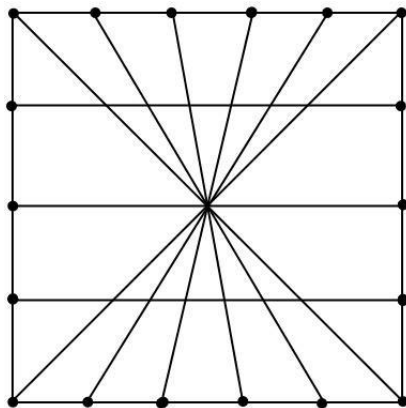
для 8 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов – 8

1. Аня нарисовала на плоскости квадрат и поделила верхнюю и нижнюю его стороны на 9 равных частей каждую. Затем она провела 10 прямых, соединяющих самую левую верхнюю точку с самой правой нижней, вторую слева верхнюю точку со второй справа нижней, и так далее. После этого она поделила правую и левую стороны каждую на 8 равных частей и провела 7 горизонтальных прямых через точки деления. (На рисунке показан пример, когда сначала она провела 6 прямых сверху вниз, а затем 3 горизонтальных). На сколько частей эти прямые поделили квадрат?

Решение. 10 прямых сверху вниз поделили квадрат на $9 + 9 + 2$ частей. Затем каждая горизонтальная прямая, кроме той, что проведена посередине, делит на две 9 частей (либо сверху, либо снизу) и еще две (одну справа и одну слева). Таких делений 6. Каждое из них прибавляет $9 + 2 = 11$ частей. Средняя горизонтальная прямая делит две части каждую на две (то есть, прибавляет две части). Итого: $20 + 11 \cdot 6 + 2 = 88$.



Ответ. 88.

2. Однажды утром 10 января Кот в сапогах обнаружил, что его вес стал на 20% больше, чем был до новогодних праздников. Чтобы восстановить в форму, Кот в сапогах сел на диету, и вскоре обнаружил, что его вес уменьшился на 20% по сравнению с весом 10 января, и на 224 грамма по сравнению с весом до новогодних праздников. Сколько весил Кот в сапогах до новогодних праздников? В ответ запишите только число – вес Кота в сапогах до новогодних праздников в килограммах.

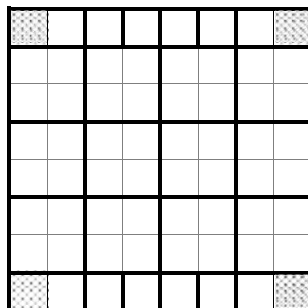
Решение. Обозначим вес Кота в сапогах до новогодних праздников за x . Тогда его вес 10 января составлял $1,2x$, поскольку 120% от числа - это $120 : 100 = 1,2$ части от целого. Аналогично, после уменьшения веса на 20%, он стал равняться $1,2x \cdot 0,8 = 0,96x$. Этот вес на 224 грамма меньше изначального, то есть x . Значит, $x - 0,96x = 224$ грамма, то есть

$0,04x = 224$ грамма, откуда $x = 5600$ граммов, то есть 5,6 килограммов. Это и есть ответ.

Ответ. 5,6.

3. Из клетчатого квадрата 8×8 вырезали часть угловых клеток, а оставшуюся фигуру разбили на квадраты со сторонами 1 и 2 так, чтобы квадратов каждого типа получилось поровну. Сколько клеток могло быть вырезано?

Решение. Пусть имеется k квадратов со стороной 1 и k квадратов со стороной 2. Тогда общая площадь, которую занимают эти фигуры, составляет $k + 4 \cdot k = 5 \cdot k$. Значит, площадь должна делиться на 5. Поскольку площадь исходного квадрата равна 4, а вырезали не более 4 клеток, то разность будет делиться на 5 только если вырезали 4 клетки. Покажем, что фигура с удаленными угловыми клетками условию удовлетворяет. Пример справа.



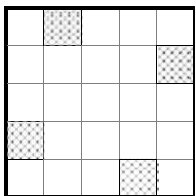
4. В кошельке лежит 1000 рублей одно-, двух- и пятирублёвыми монетами. Известно, что общее число монет равно 300, и что монет каких-то двух достоинств равное количество. Найдите это количество.

Решение. Пусть у нас x , y и z рублёвых, двухрублёвых и пятирублёвых монет соответственно. По условию $x + y + z = 300$, $x + 2y + 5z = 1000$. Допустим, $x = y$. Тогда $z = 300 - 2x$, откуда $x + 2x = 1000 - 5(300 - 2x)$, то есть $7x = 500$, что невозможно, так как 500 не делится на 7.

Допустим, $x = z$. Тогда $y = 300 - 2x$, откуда $x + 5x = 1000 - 2(300 - 2x)$, то есть $2x = 400$, $x = 200 = z$. Но тогда монет больше 300, что противоречит условию задачи.

Значит, $y = z$. Тогда $x = 300 - 2y$, откуда $300 - 2y = 1000 - 2y - 5y$, то есть $5y = 700$ и $y = z = 140$, $x = 20$.

Ответ. 140.



5. Сколько клеточных прямоугольников, содержащих хотя бы одну закрашенную клетку, изображено на рисунке? Любой квадрат (в частности, сам квадрат 5×5) является прямоугольником.

Решение. Способов выбрать горизонтальные линии (столько же, сколько и вертикальных) $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Таким образом, квадрат 5×5 содержит $15 \cdot 15 = 225$ прямоугольников.

Из них не содержат закрашенные клетки 21 квадрат 1×1 , 28 прямоугольников 1×2 , 18 прямоугольников 1×3 , 8 прямоугольников 1×4 , 2 прямоугольника 1×5 , 8 квадратов 2×2 , 8 прямоугольников 2×3 , 4 прямоугольника 2×4 , 1 квадрат 3×3 . Значит, число прямоугольников, содержащих хотя бы одну закрашенную клетку, равно $225 - 21 - 28 - 18 - 8 - 2 - 8 - 8 - 4 - 1 = 127$ прямоугольников.

Ответ. 127.

6. В соревновании по настольному теннису участвовало ровно 50 ребят, среди которых половина рыцари, всегда говорящие правду, и половина - лжецы, которые всегда лгут. По правилам турнира проигравший выбывал. В результате после нескольких игр ровно половина ребят выбыла. После этого событий каждый из оставшихся участников заявил, что выиграл ровно у одного рыцаря. Какое наибольшее количество рыцарей могло остаться участниками турнира?

Решение. Каждый из оставшихся рыцарей выиграл ровно у одного рыцаря. Поэтому оставшихся рыцарей не больше, чем выбывших, то есть удвоенное количество оставшихся рыцарей не больше 25, следовательно, их не больше 12. Пример: один из рыцарей выигрывает у другого, затем половина оставшихся рыцарей выигрывает у одного из оставшихся, включая того, который выиграл у первого рыцаря (сначала 2-й рыцарь выигрывает у 1-го, потом 3-й у 2-го, 5-й у 4-го и т. д. 25-й у 24-го), а среди 25 лжецов, например, один выигрывает по очереди у 12 других лжецов.

Ответ. 12.

7. Даша нарисовала прямоугольник с целыми сторонами. Катя нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 2 и увеличив ширину на 3. Таня тоже нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 3 и увеличив ширину на 5. Оказалось, что площади прямоугольников Кати и Тани равны. Выберите из приведенных чисел те, которые могли быть периметром прямоугольника Даши.

- 50
- 52
- 54
- 100
- 206

Решение. Пусть Дашин прямоугольник имел длину x и ширину y . Тогда площади Катиного и Таниного прямоугольников равны, соответственно, $(x - 2)(y + 3)$ и $(x - 3)(y + 5)$.

Приравняв эти два выражения, получим $xy - 2y + 3x - 6 = xy - 3y + 5x - 15$, откуда $y = 2x - 9$. Тогда периметр Дашиного прямоугольника равен $2x + 2y = 6x - 18 = 6(x - 3)$. Это число кратно 6. Из приведенных чисел подходит только 54. Если $6x - 18 = 54$, то $x = 12$. Тогда $y = 2x - 9 = 15$.

Ответ. 54.

8. Угол C треугольника ABC равен 60° . На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D так, что $DC + CA = BC$. Известно, что $AB = 8$. Найдите длину AD .

Решение. На стороне CB отметим точку E так, что $CE = CA$. Тогда треугольник ACE равносторонний, а $EB = DC$. Тогда заметим, что треугольник AEB равен треугольнику ADC (поскольку $\angle AEB = \angle ACD = 120^\circ$, $BE = CD$, $AE = AC$). Тогда $AD = 8$.

Ответ. 8.

