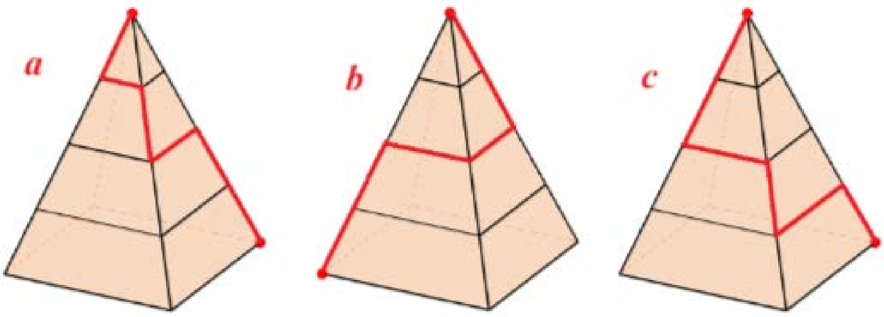
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2024–2025 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 10 КЛАСС

1. Боковые грани пирамиды — четыре равных равнобедренных треугольника. На этих гранях проведены отрезки, параллельные основанию, как показано на чертеже. Длины путей, отмеченные на чертежах красным, соответственно равны a, b и c.



Выберите верное утверждение:

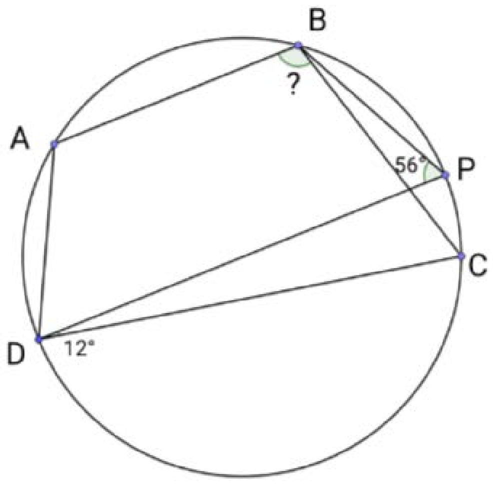
( ) $c > b = a$
( ) $b = c > a$
( ) $a = b = c$
( ) $a < b < c$

2. Действительные числа x и y таковы, что

$$\frac{9x}{y} = xy = 2x + 4y.$$

Какое наибольшее значение может принимать x?

3. На чертеже четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Прямая, проходящая через точку D, и параллельная AB, пересекает ω в точке P. Известно, что $\angle PDC = 12°$, $\angle DPB = 56°$.



Найдите величину $\angle ABC$. Ответ выразите в градусах.

4. Натуральные числа a, b и c таковы, что НОД $(a, b) = 2$ и НОД $(b, c) = 4$. Чему может быть равен НОД (a, c)? Выберите все верные ответы:

[ ] 12
[ ] 3
[ ] 6
[ ] 1
[ ] 2

5. У Жоры есть коробка конфет, в которой конфеты расположены прямоугольником 4×5 (4 строчки, 5 столбцов). Жора берёт по одной конфете, каждый раз выбирая из строки, в которой осталось максимальное количество конфет; если таких несколько — из любой из них. Сколькими способами Жора мог съесть первые 5 конфет? Порядок поедания важен.

6. Прямая l, пересекающая стороны AB и AC треугольника ABC, разбивает его на равносторонний треугольник и на четырёхугольник. Пусть X и Y — проекции точек B и C на прямую l. Найдите длину отрезка XY, если $AB = 20$, $AC = 21$.

7. В стране 3 мегаполиса и 7 городков. Авиакомпания планирует расписание полётов между ними. Руководитель хочет, чтобы выполнялись следующие условия:

- от любого населённого пункта до любого другого можно добраться (прямым рейсом или с пересадками);
- если из пункта A есть рейс в пункт B, то и из пункта B есть рейс в пункт A;
- из двух мегаполисов можно улететь ровно в четыре населённых пункта, а из одного — в три;
- из каждого городка можно улететь ровно в один населённый пункт.

Сколько существует способов организовать такое расписание?

8. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_9$ таковы, что

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_9^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_9} = 48.$$

Какое наибольшее значение может принимать a_1?