

А. Прямая снова крутится

Рассмотрим линейный классификатор на плоскости $\mathbb{R}^2$, задаваемый прямой $x + Ay = 0$. Точка (x, y) относится к первому классу, если $x + Ay > 0$. В противном случае, если $x + Ay \leq 0$, точка относится ко второму классу.

Приведите пример таких **целых** чисел A , b и c , что для трёхчлена $P(x) = x^2 + bx + c$ точка $(2, P(2))$ относится к первому классу, а точки $(1, P(1))$ и $(3, P(3))$ — ко второму классу.

В. Генератор случайности

Генератор случайных чисел работает следующим образом. Если задать ему натуральное число $m \geq 6$, он выдаст последовательно 10 натуральных чисел. Каждое число выбирается им независимо и равновероятно из множества $\{1, 2, \dots, m\}$.

В силу системной ошибки, результат генератора выводится на экран следующим образом: числа 1, 2, 3, 4, 5 выводятся без изменений, а вместо любого другого числа выводится число 6.

При каком натуральном $m \geq 6$ вероятность получить на экране последовательность чисел

6, 2, 6, 6, 1, 6, 4, 6, 3, 5

максимальна?

С. Градиентный спуск на листочке

Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^{20} + y^{26}$. Ниже приведён алгоритм, который по начальной точке (a, b) строит последовательность точек (X_i, Y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots$.

Ниже в коде `decrease_lr = False` для пункта (а), и `decrease_lr = True` для пункта (б).

```
X0, Y0 ← a, b
dx, dy ← 0, 1
lr ← 1
for i = 1, 2, 3, ... do
    dx, dy ← dy, -dx
    if decrease_lr and i · lr ≥ 2 then:
        lr ← lr / 2
    end if
    Xi, Yi ← Xi-1, Yi-1
    if f(Xi + dx · lr, Yi + dy · lr) < f(Xi, Yi) then
        Xi ← Xi + dx · lr
        Yi ← Yi + dy · lr
    end if
end for
```

Докажите, что, какая бы точка ни была начальной, справедливы следующие утверждения.

- (а) Найдётся такой номер N , что расстояние от точки (X_N, Y_N) до начала координат не превосходит 1.
 - (б) Найдётся такой номер N_0 , что для любого номера $N \geq N_0$ расстояние от точки (X_N, Y_N) до начала координат не превосходит $\frac{1}{1000}$.
-

Д. Лазер

Пол прямоугольной камеры с зеркальными стенами имеет форму клетчатого прямоугольника 1000×3000 . В **узлах сетки** расположены датчики температуры (всего $1001 \cdot 3001$ датчиков). Изначально все датчики показывают температуру 0°C .

В **центрах некоторых клеток** расположено по одному устройству, испускающему лазерные лучи. Каждое устройство испускает лазерный луч по диагонали клетки, в центре которой оно находится (то есть в одном из четырех возможных направлений, в сторону одного из узлов соответствующей клетки). При этом то же устройство поглощает лучи, приходящие из противоположного узла. На лучи трёх других направлений устройство не влияет.

Всего установлено 300 устройств, которые излучают по одному лучу. Каждый луч отражается зеркально от стенок (попадая в угол, луч отражается в противоположном направлении), пока не поглотится каким-то из устройств.

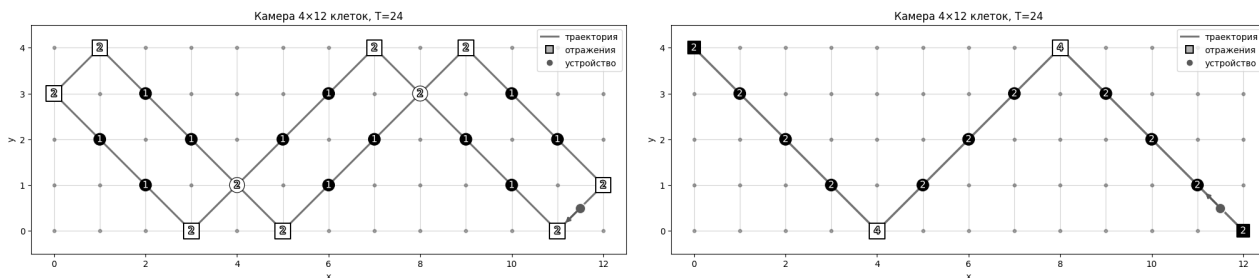
Лазерный луч, «посещая» очередной датчик температуры, увеличивает его показание на 1°C . Если же в точке, где располагается датчик, луч отражается, он увеличивает показание соответствующего датчика сразу на 2°C . Назовём *тепловой картой* матрицу A размера 1001×3001 , элементы которой равны итоговым показаниям соответствующих датчиков температуры.

Для проверки корректности показаний датчиков, полученные значения анализируют следующим образом. Выбирается квадратная матрица K размера $s \times s$, называемая *ядром* размера s , после чего вычисляется *свёртка* матрицы A с ядром K , то есть матрица $B = A \star K$ размера $(1002 - s) \times (3002 - s)$, где

$$B[i][j] = \sum_{u=0}^{s-1} \sum_{v=0}^{s-1} A[i+u][j+v] K[u][v], \quad 0 \leq i \leq 1001 - s, \quad 0 \leq j \leq 3001 - s.$$

Назовём ядро K *определяющим*, если для любой тепловой карты A все элементы матрицы B равны нулю, при этом не все элементы ядра K равны 0. При каком наименьшем значении s существует определяющее ядро размера s ?

Ниже на рисунке вы можете видеть как запущенный луч изменит температуру в датчиках до момента поглощения.



Е. Новая выборка

Модель по вещественному числу x предсказывает вещественное число методом *линейной регрессии*, то есть по формуле $f(x) = ax + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$ — параметры модели f .

Дана *обучающая выборка* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, где $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Модель f обучается на этих данных: параметры a и b выбираются *методом наименьших квадратов*, то есть так, чтобы значение выражения

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

было минимальным.

Определим *коэффициент детерминации* R_0^2 , посчитанный на этой выборке, следующим образом:

$$R_0^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad \text{где} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Построим новую выборку, добавив к исходной n объектов $(x_i, f(x_i)), i = 1, 2, \dots, n$. Пусть на получившейся выборке из $2n$ объектов обучается модель $g(x) = cx + d$ также методом наименьших квадратов. Обозначим через R_1^2 коэффициент детерминации для модели g , посчитанный на выборке из всех $2n$ объектов.

Предполагается, что параметры обеих моделей удалось подобрать методом наименьших квадратов единственным образом.

Выразите R_1^2 через R_0^2 .

Г. Вымышленная ситуация

Артур и Таня готовят вычислительные мощности к практическому туру для 1000 участников финала всероссийской олимпиады школьников по ИИ. Изначально они хотели вернуть всю инфраструктуру в облаке и выдавать видеокарты (GPU) из общего набора, но, чтобы исключить сетевые задержки, было решено собрать каждому участнику персональный кластер из 8 устройств.

На складе партнёров олимпиады есть по 8000 устройств каждого из трех типов.

- Тип 1 (зеленые) — CUDA, быстрые, но горячие.
- Тип 2 (красные) — поддерживают открытые стандарты, подходят для обучения больших языковых моделей (LLM), но требуют сложной настройки драйверов.
- Тип 3 (желтые) — экспериментальные ускорители (TPU).

По условиям поставки устройства типа 1 можно получать только партиями по 7 штук; устройств каждого типа должно быть не меньше, чем 2026; всего со склада следует взять ровно 8000 устройств. Если в соответствии с этими условиями можно привезти со склада y_1 устройств первого типа, y_2 — второго и y_3 — третьего, будем называть тройку целых чисел (y_1, y_2, y_3) *допустимой*, то есть:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 8000, \quad y_t \geq 2026 \ (t = 1, 2, 3), \quad y_1 \div 7.$$

Каждый участник имеет персональный шифр $i = 1, 2, \dots, 1000$. Устройства, поставленные со склада, распределяются между участниками. Пусть участник i получает персональный кластер $S_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$, в котором $x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}$ — количество устройств первого, второго и третьего типа соответственно. Числа $x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}$ — целые неотрицательные, причём $x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} = 8$.

Оказалось, что кто-то из участников предпочитает «зеленых», кто-то фанат открытых стандартов и выбирает «красных», а кто-то любит необычных «жёлтых». Для каждого участника заданы *предпочтения* устройств $u_{i,1}, u_{i,2}, u_{i,3}$, указанные во входном файле `gpu.csv`.

Файл содержит заголовок и 1000 строк с 3 столбцами с данными: в i -й строке записаны три целых числа $u_{i,1}, u_{i,2}, u_{i,3}$ (именно в таком порядке), соответствующие предпочтениям участника i .

Полезность кластера $S = (x_1, x_2, x_3)$ для участника i задаётся формулой

$$V_i(S) = u_{i,1}x_1 + u_{i,2}x_2 + u_{i,3}x_3.$$

Распределение устройств называется *честным*, если неравенство $V_i(S_i) \geq V_i(S_j)$ справедливо для любых двух участников i, j .

- Приведите пример допустимой тройки значений (y_1, y_2, y_3) , при которой честного распределения не существует, и докажите это.
- Существует ли допустимая тройка (y_1, y_2, y_3) , при которой существует честное распределение?