

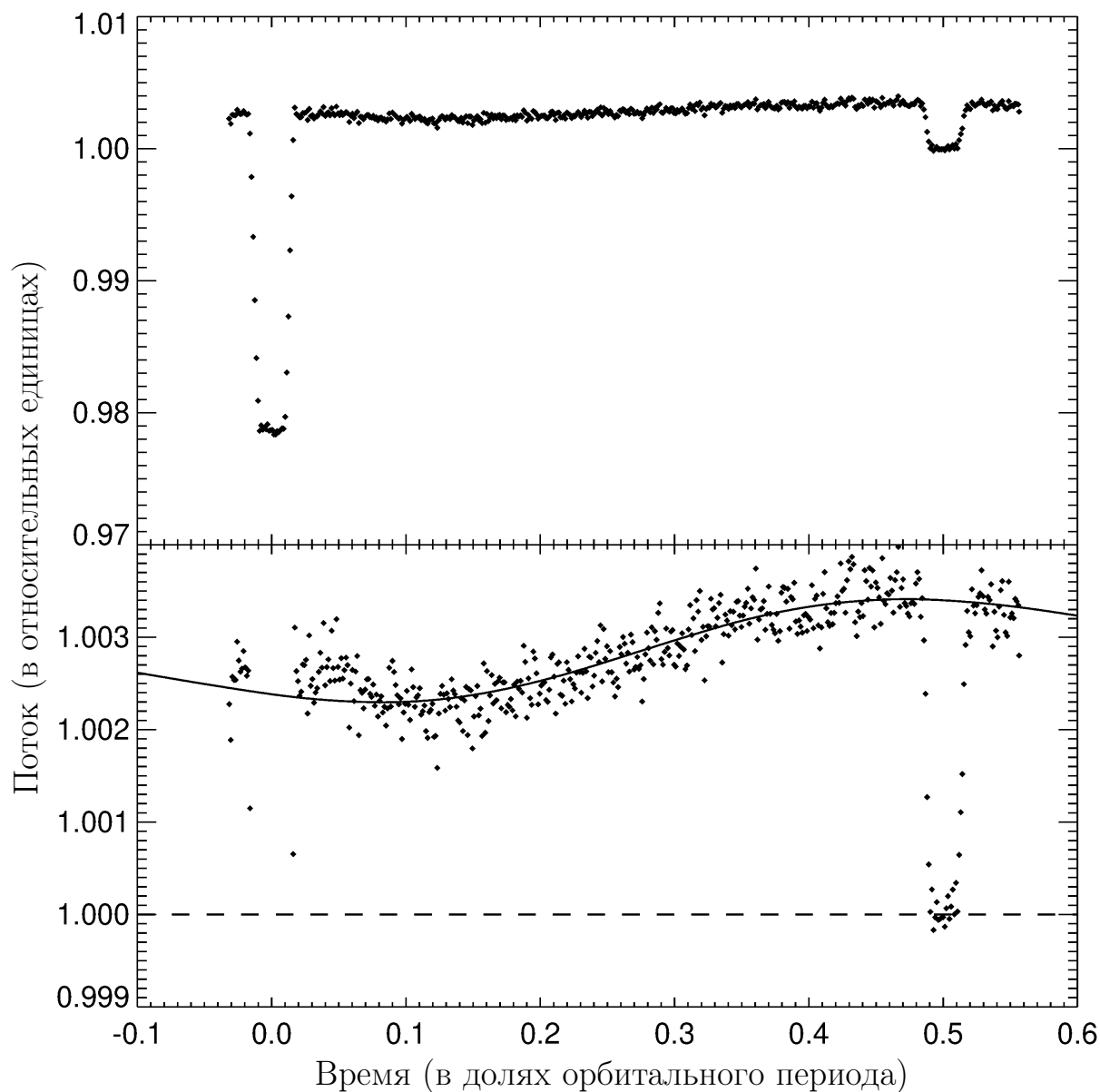
Содержание

11.7. Планета всходит и заходит	2
11.8. Геометрически точно	5
11.9. Гонки за светом	9

11.7. Планета всходит и заходит

А.А.Федотов

При наблюдениях звезды у нее транзитным методом была обнаружена планета. Определите радиус планеты и эффективные температуры ее дневной и ночной сторон, воспользовавшись кривой блеска, полученной при наблюдении на длине волны 8 мкм (для удобства кривая блеска приведена для двух разных масштабов по оси ординат). Известно, что радиус звезды равен $5.6 \cdot 10^5$ км, а ее эффективная температура $4.5 \cdot 10^3$ К.



Решение. Найдем потоки, обусловленные излучением отдельно звезды и отдельно планеты при наблюдении ее дневной и ночной сторон. Сразу заметим, что излучение звезды можно считать изотропным (разнообразные эффекты, возникающие у затменно-двойных из-за наличия второго компонента, тут существенными не будут — планета имеет сравнительно малую массу), а вот у планеты, вращение которой, по-видимому, синхронизировано с обращением вокруг звезды, температуры разных сторон существенно отличаются.

Поток, обусловленный только излучением звезды, можно определить в момент вторичного минимума («затмения» планеты звездой), когда планета заходит за звезду.

Ему соответствует менее глубокий провал на графике, так как температура планеты в любом случае заметно меньше температуры звезды, а площади, с которых в каждом из минимумов не приходит излучение, равны. Тогда, зная поток звезды, мы сможем определить потоки, приходящие с ночной и с дневной сторон планеты. Однако получить по этим данным температуры нельзя, поскольку нам неизвестен радиус планеты.

Определить радиус поможет глубина транзита (более глубокого минимума, когда планета проходит по диску звезды). Отношение его глубины за вычетом потока ночной стороны планеты к общему потоку звезды будет равно отношению площадей диска звезды и планеты или квадратов их радиусов. Важно не забыть, что пренебрегать собственным излучением планеты в этом случае нельзя (если мы не хотим получить для ее ночной стороны температуру, равную нулю).

Рассмотрим кривую блеска. Видно, что авторы статьи, из которой взяты данные, о нас позаботились: поток собственно звезды любезно принят за 1.000. Поток во время транзита составляет 0.979, а поток от ночной стороны планеты, который можно оценить по значениям на кривой блеска непосредственно рядом с транзитным участком, составляет около 0.002 потока звезды (последнее значение можно определить точнее, но поскольку мы не можем точнее найти глубину минимума в транзите, тут эта точность окажется бесполезной). Таким образом, во время транзита поток от той части диска звезды, которая закрыта планетой, составлял бы $1.000 - 0.979 + 0.002 = 0.023$, поэтому мы знаем отношение квадратов радиусов планеты $R_{\text{п}}$ и звезды $R_{\text{з}}$:

$$\left(\frac{R_{\text{п}}}{R_{\text{з}}}\right)^2 = 0.023.$$

Тем самым $R_{\text{п}}/R_{\text{з}} \approx 0.15$, и радиус планеты оказывается равным $8.4 \cdot 10^4$ км.

Теперь обратимся к нижнему графику и посмотрим на ту его часть, где видны и звезда, и планета. Учитывая, что единичный поток обеспечивается звездой, находим, что поток дневной стороны планеты равен 0.0034, а ночной — 0.0023. Поскольку наблюдения проводятся на одной конкретной длине волны и в спектральной полосе постоянной ширины, то поток пропорционален чернотельной интенсивности $B_{\lambda}(T)$ для соответствующей температуры на длине волны $\lambda = 8$ мкм, умноженной на площадь источника. Поэтому температуры для дневной и ночной сторон планеты (в дальнейшем «дп» и «нп») должны удовлетворять соотношениям

$$\frac{0.023 \cdot B_{\lambda}(T_{\text{дп}})}{B_{\lambda}(T_{\text{з}})} = 0.0034 \quad \Rightarrow \quad \frac{B_{\lambda}(T_{\text{дп}})}{B_{\lambda}(T_{\text{з}})} = 0.15 \quad (1)$$

и

$$\frac{0.023 \cdot B_{\lambda}(T_{\text{нп}})}{B_{\lambda}(T_{\text{з}})} = 0.0023 \quad \Rightarrow \quad \frac{B_{\lambda}(T_{\text{нп}})}{B_{\lambda}(T_{\text{з}})} = 0.10. \quad (2)$$

Вспомнив, как выглядит функция Планка

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)^{-1},$$

понимаем, что коэффициенты перед экспонентой в любом случае сократятся.

Введем для удобства величину $\chi = \frac{hc}{\lambda kT}$. Несложно вычислить, что для звезды $\chi_{\text{з}} = 0.4$, и тогда соотношения (1) и (2) можно записать в виде

$$\chi_{\text{дп}} = \ln \left(\frac{\exp(\chi_{\text{з}}) - 1}{0.15} + 1 \right) = 1.45 \quad (3)$$

и

$$\chi_{\text{ни}} = \ln \left(\frac{\exp(\chi_3) - 1}{0.10} + 1 \right) = 1.78. \quad (4)$$

Поскольку $\chi \propto 1/T$, то отсюда следует, что

$$T_{\text{дн}} = \frac{0.4 \cdot 4.5 \cdot 10^3 \text{ K}}{1.45} = 1.2 \cdot 10^3 \text{ K}$$

и

$$T_{\text{ни}} = \frac{0.4 \cdot 4.5 \cdot 10^3 \text{ K}}{1.78} = 1.0 \cdot 10^3 \text{ K},$$

что близко к результатам, полученным в статье Knudson et al., Nature, v. 447, pp. 183–186, из которой и были взяты данные, положенные в основу этой задачи.

Осталось объяснить одну странность, на которую, возможно, обратили внимание решавшие задачу. На нижнем из двух графиков выполнено сглаживание кривой блеска на участках, когда поток регистрируется и от звезды, и от планеты. Наличие синусоидальной зависимости понятно: это следствие того, что планету мы видим с разных сторон и ее поток меняется в зависимости от ее ориентации. Однако минимумы и максимумы этой синусоиды несколько смещены по отношению к положению минимумов на кривой блеска, из чего можно сделать дополнительный важный вывод: распределение температуры на поверхности планеты смещено относительно прямой «звезда – планета», самое горячее место на планете находится не в подзвездной точке, а смещено от нее. Более тщательная обработка исходных данных показала, что смещение составляет около 30° .

Критерии оценивания.

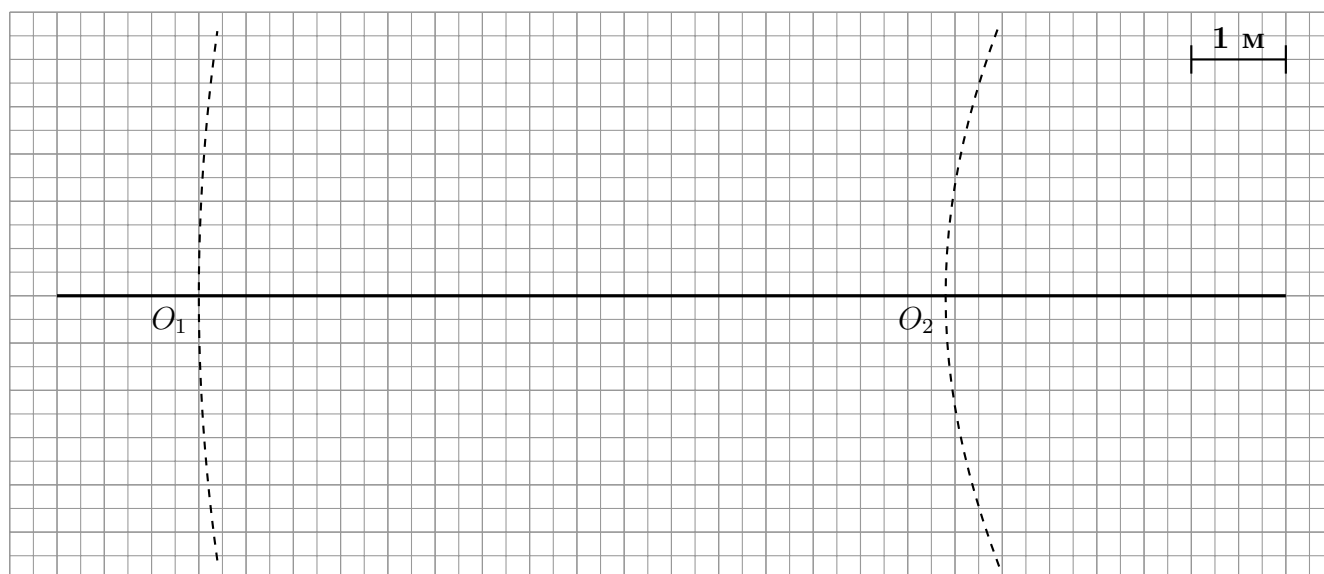
К1. Снятие измерений и их интерпретация	6
Правильная интерпретация минимумов	2
Верное определение потоков дневной, ночной сторон планеты и минимумов кривой блеска	4
К2. Определение радиуса планеты	5
Вывод формулы радиуса с учётом вклада потока планеты в континуум	3
Верное значение	2
Если радиус получен путем анализа продолжительности затмения, по данному критерию ставится 2 балла.	
При излишней точности снимается 1 балл.	
К3. Учёт монохроматичности измеряемого потока	5
Связь потока с формулой Планка	3
Запись формулы Планка с точностью до констант	2
При использовании приближения Рэлея-Джинса за данный критерий ставится 1 балл.	
К4. Вывод выражения для температуры	5
Вывод через формулу Планка	5
Вывод с использованием закона Стефана-Больцмана	2
Вывод с использованием приближения Рэлея-Джинса	2
К5. Вычисление температур дневной и ночной сторон планеты по построенной модели	4
При излишней точности снимается по 1 баллу за значение.	
Максимальная оценка:	25

11.8. Геометрически точно

В.В.Григорьев

Вам дана заготовка схемы (с указанным масштабом) зеркального телескопа, состоящего из первичного параболического собирающего зеркала диаметром $D_1 = 260$ см с относительным отверстием $1 : 3.85$ и вторичного рассеивающего гиперболического зеркала с фокусным расстоянием $F_2 = -275$ см. В точках O_1 и O_2 соответственно эти зеркала пересекают главную оптическую ось. Диаметр поля зрения телескопа составляет $19'25''$.

- А. Определите тип оптической системы (название) и ее эффективное фокусное расстояние F .
- В. Изобразите оба зеркала строго в соответствии с их геометрическими характеристиками, укажите эти характеристики на чертеже, поглощающую часть обозначьте штриховкой или закрасьте, считая, что толщина зеркал не превышает 25 см.
- С. Изобразите ход хотя бы одного луча **внутри трубы телескопа** от звезды, находящейся в центре поля зрения, до фокальной плоскости.
- Д. Какое минимальное число одиночных кадров потребуется для получения изображения спиральной галактики с угловыми размерами $6' \times 1'$, если в фокальной плоскости установлена идеальная ПЗС-матрица разрешением 2048×2048 с пикселями размером 5×5 мкм?
- Е. Назовите телескоп или укажите его местоположение, если известно, что он находится на территории бывшего СССР.



Решение. Система телескопа с параболическим объективом и гиперболическим вторичным зеркалом является системой Кассегрена. В классической схеме Кассегрена фокусы первичного и вторичного зеркал совпадают, но их допускается разнести, например, для изменения выноса фокуса. В больших телескопах порой изменение положения вторичного зеркала используется для фокусировки телескопов. Заметим, что фокусное расстояние зеркала и фокусное расстояние гиперболы как математической кривой — разные понятия, и их не следует путать.

Относительное отверстие объектива позволяет рассчитать его фокусное расстояние $F_1 = 2.6 \cdot 3.85 = 10$ м. Благодаря имеющемуся масштабу можно обозначить часть

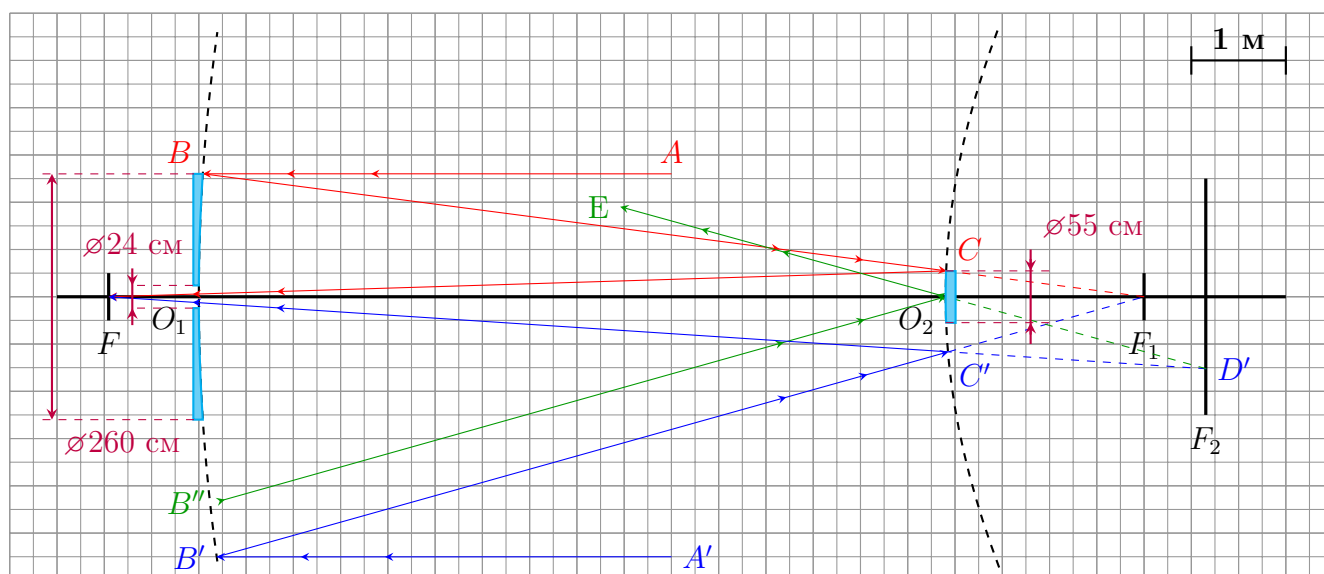
параболы, реально являющуюся зеркалом, однако стоит помнить, что в системе Кассегрена фокус выносится за главное зеркало, так что в нем необходимо будет сделать отверстие. Также отметим, что расстояние между центрами зеркал вдоль оптической оси $|O_1O_2| = 7.9$ метра, которое получается из масштаба схемы при помощи линейки.

Далее найдем положение фокальной плоскости телескопа (эффективного фокуса). Это можно сделать двумя разными способами. Будем считать, ввиду малого поля зрения можно рассматривать гиперболическое зеркало с заданным фокусным расстоянием как параксиальное рассеивающее зеркало (фактически, заменив его сферическим). Так как из условия напрямую следует, что фокусы заданных поверхностей не совпадают, то оптическое свойство гиперболы неприменимо.

Вариант 1. Получение эффективного фокуса геометрически

Обратим внимание, что параболическая поверхность нам дана довольно большого диаметра (больше размеров объектива), значит, можно использовать этот факт для более точных построений. На рисунке ниже путь такого луча будет обозначен **синим** цветом. **Красный** же луч является лучом, попадающим в край главного зеркала, то есть идущим в пределах трубы телескопа, но он также подходит для подобного построения.

Отметим фокус F_1 первичного зеркала на чертеже и построим луч $A'B'$, параллельный главной оптической оси: после отражения он пересечет ее в фокусе. Однако, дальше гиперболического зеркала луч не пойдет (попав в точку C'), отразившись в обратную сторону, поэтому участок до фокуса обозначен пунктиром. Куда именно пойдет отраженный луч от точки C' ? Для ответа на этот вопрос необходимо изобразить фокальную плоскость гиперболического зеркала (линия F_2), а также построить луч $B''O_2$ (зеленый), параллельный $B'C'$, приходящий в центр вторичного зеркала. Продолжение «назад» отраженного луча O_2E пересечет фокальную плоскость в точке D' . Значит, из этой же точки будет исходить продолжение «назад» луча, порожденного лучом $B'C'$, то есть $D'C'F$ — прямая линия.



Вариант 2. Получение эффективного фокуса аналитически

Параболическое зеркало дает действительное изображение в своей фокальной плоскости. Расстояние между главным зеркалом и получаемым изображением составит

1001 см $\approx$ 10 м — величину фокусного расстояния. Однако, лучи света дойдут лишь до гиперболического зеркала, преодолев расстояние $O_1O_2 = 790$ см.

Для гиперболического зеркала, фактически, получится исходный мнимый объект, являющийся действительным изображением от параболического зеркала, находящийся в точке F_1 . Тогда можно записать формулу тонкой линзы (она работает и для зеркал):

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{F_2 d_2}{d_2 - F_2} = \frac{(-275) \cdot (-210)}{(-210) - (-275)} \approx -890 \text{ см},$$

где F_2 — фокусное расстояние гиперболического зеркала (зеркало рассеивающее, поэтому фокусное расстояние отрицательное), $d_2 = |O_2F_1| = 790 - 1000 = -210$ см — расстояние от вторичного зеркала до объекта (объект мнимый, поэтому расстояние отрицательное), $f_2 = |O_2F|$ — расстояние от вторичного зеркала до действительного изображения (здесь расстояние отрицательное, так как изображение получилось с той же стороны, из которой шли лучи).

Конец вариантов

Оба варианта дают вынос фокуса $|O_1F| \approx 1$ м. Получаем, что пучок параллельных лучей, попавший в объектив, преодолел расстояние $790 \text{ см} + 890 \text{ см} = 1680 \text{ см}$ прежде чем сойтись в одной точке. Является ли эта величина эффективным фокусным расстоянием всей системы? Нет, все прозаичнее.

Эффективное фокусное расстояние оптической системы — это фокусное расстояние одной линзы того же диаметра, что и первичное зеркало (в данном случае, хотя обычно учитывается наличие диафрагмы), которая давала бы сходящийся пучок света под тем же углом. Становится понятно, что достаточно рассмотреть подобные треугольники: длина катета $|O_2C| = D_2/2$ (радиус гиперболического зеркала) также относится к радиусу объектива как расстояние $|FO_2|$ к искомому эффективному фокусному расстоянию F . При этом катет $|O_2C|$ пропорционален $|O_1B| = D_1/2$ через отношение $|O_2F_1|$ и F_1 :

$$\frac{|O_1B|}{|O_2C|} = \frac{|O_1F_1|}{|O_2F_1|} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_2}{2} = |O_2C| = \frac{D_1}{2} \cdot \frac{|O_2F_1|}{|O_1F_1|} = 130 \cdot \frac{210}{1000} = 27.3 \text{ см},$$

$$\frac{|O_2C|}{D_1/2} = \frac{|O_2F|}{F} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{D_1}{2} \cdot \frac{|O_2F|}{|O_2C|} = \frac{D_1}{2} \cdot \frac{|O_2F| \cdot |O_1F_1|}{|O_1B| \cdot |O_2F_1|} = \frac{|O_2F| \cdot |O_1F_1|}{|O_2F_1|} = \frac{890 \cdot 1000}{210} \approx 42.5 \text{ м}.$$

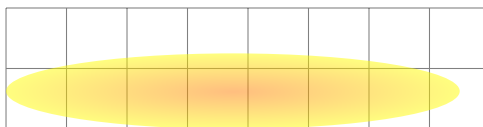
Те же вычисления можно проделать и для синего луча с тем же результатом. Итак, мы получили, что эффективное фокусное расстояние телескопа $F = 42.5$ м, попутно получив размер вторичного зеркала: его диаметр составляет $D_2 = 27.3 \cdot 2 \approx 55$ см. На самом деле размер должен быть немного больше, если учитывать диаметр поля зрения (добавка составляет около 5 см), однако точный расчет не требуется.

Угловое поле зрения в $19'25''$ позволяет определить диаметр изображения l в фокальной плоскости за главным зеркалом:

$$l = 42.5 \text{ м} \cdot \frac{19' \times 60'' + 25''}{206265''/\text{рад}} = 24 \text{ см}$$

Так как речь про параксиальные лучи (практически параллельные главной оптической оси), то и вырез в главном зеркале должен быть не меньшего диаметра (добавка получается также около 5 см, что также не требовалось). На схеме выше сами зеркала изображены голубым цветом, отражающие поверхности обращены друг к другу, геометрические размеры указаны фиолетовым цветом. Луч от звезды в центре поля зрения, идущий внутри трубы изображен красным цветом.

Согласно условию, в фокальной плоскости установлена матрица с линейным размером $2048 \times 5 \text{ мкм} \approx 10 \text{ мм}$, а получаемое изображение участка неба диаметром $19'25''$ имеет линейный размер $l = 24 \text{ см}$, что дает участок неба $0'.8 \times 0'.8$, проецируемый на матрицу. Значит, спиральная галактика (видимая под небольшим углом как эллипс) размерами $6' \times 1'$ имеет максимальный линейный диаметр 7.4 см . Отсюда следует, что нам потребуется 15 полных кадров (или 16 с учетом перекрытия; см. рисунок снизу), так как имеющаяся ПЗС-матрица сильно меньше выходного пучка света.



В данной задаче рассмотрен Зеркальный телескоп им. акад. Г.А.Шайна (ЗТШ) — второй по величине телескоп России, находящийся в Крымской астрофизической обсерватории и носящий имя ее первого директора. Его «близнец» (но с главным зеркалом, выполненным из ситалла, а не из пирекса) находится в обсерватории Бюракан (Армения) и носит имя ее основателя и первого директора академика В.А. Амбарцумяна.

Критерии оценивания.

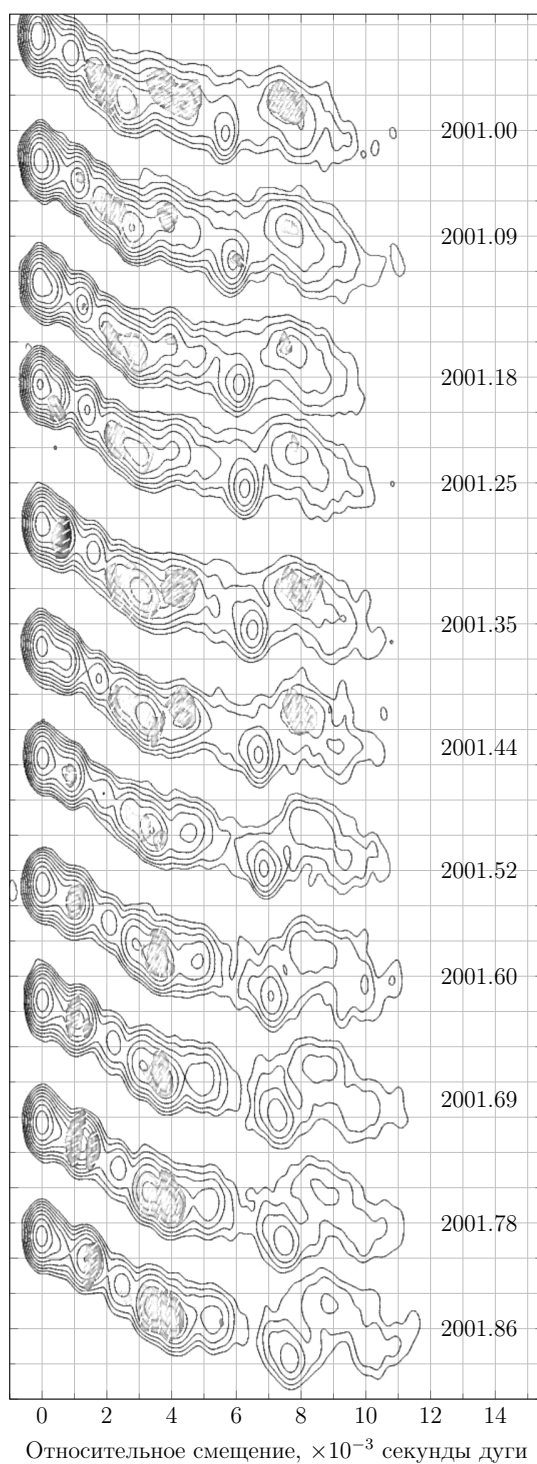
К1. Схема и фокусное расстояние	7
Написано «система Кассегрена»	2
Описаны детали построения лучей или приведены формулы для вычисления положения эффективного фокуса	2
Верно рассчитано эффективное фокусное расстояние F	3
Если оно считается равным $F_1 = 10 \text{ м}$ или $\approx 17 \text{ м}$ —	1 балл.
К2. Схема телескопа и лучи:	13
Эффективный фокус находится слева от главного зеркала на схеме (погрешность $\pm 0.75 \text{ м}$)	2
Наличие отверстия в главном зеркале	2
Верно изображен луч внутри трубы (красный)	2
Размеры обоих зеркал соответствуют масштабу	2+2
Подписаны диаметры зеркал и отверстия	1+1+1
К3. Кадры и название телескопа	5
Верные размеры матрицы или пикселя (угловые)	2
Необходимо верное число кадров, соответствующее рассчитанному F	2
Телескоп ЗТШ/в КрАО (Крым)/в Бюракане (Армения)	1
Максимальная оценка:	25

11.9. Гонки за светом

М.В.Костина, П.А.Тараканов

Вам даны радиокарты наблюдений на частоте 22 ГГц джета, вылетающего из активного ядра галактики (АЯГ). Справа от каждой карты подписана дата наблюдения (в годах и долях года). Масштаб по осям абсцисс и ординат одинаков и указан на оси абсцисс, само ядро находится на отметке 0 по оси абсцисс.

Известно, что угол между направлением вылета джета из АЯГ и направлением на Солнце равен 15° . Наблюдаемое красное смещение галактики равно $z = 0.033$. Найдите величину, на которую скорость движения джета отличается от скорости света, выразив ее в долях скорости света.



Решение. Найдем расстояние до галактики. Поскольку $z = 0.033 \ll 1$, то расстояние выражается как $r = \frac{c \cdot z}{H}$, где c — скорость света, H — постоянная Хаббла. Получаем

$$r = \frac{c \cdot z}{H} = \frac{3 \cdot 10^5 \text{ км/с} \cdot 0.033}{7 \cdot 10^1 \text{ км/с/Мпк}} = 1.4 \cdot 10^2 \text{ Мпк}.$$

Теперь определим скорость движения джета в картинной плоскости. Для этого надо выбрать один (а лучше — несколько) «узел» джета: область повышенной яркости, движение которой можно проследить по картам. Определенности ради займемся узлом, который на первой карте находится на отметке по оси абсцисс 5.6. Его положение прослеживается на всех картах, на последней он оказывается на отметке 7.6. Измерив линейкой его расстояние от положения ядра, получаем, что за 0.86 года он переместился на расстояние $2.1 \cdot 10^{-3}$ секунды дуги, то есть движется с угловой скоростью около $2.4 \cdot 10^{-3}$ угловой секунды в год.

Более точно соответствующее измерение можно выполнить, если заметить, что смещение карты по вертикали пропорционально разности времен получения каждой очередной карты по сравнению с первой. Тогда можно провести прямые, соединяющие положения одного и того же узла джета (пример для двух узлов приведен на следующей странице) и по наклону прямой получить компоненту скорости перемещения узла вдоль оси абсцисс. При этом для разных узлов наклоны будут получаться немного разными — скорости движения узлов несколько различаются.

Поскольку на расстоянии 1 пк угловая скорость $1''/\text{год}$ соответствует линейной скорости $1 \text{ а.е./год} = 4.74 \text{ км/с}$, наблюдаемая скорость движения джета u оказывается равной

$$u = 1.4 \cdot 10^8 \cdot 2.4 \cdot 10^{-3} \cdot 4.74 \text{ км/с} = 1.6 \cdot 10^6 \text{ км/с} = 5.3 c,$$

где c — скорость света. И, поскольку мы таким образом наблюдаем проекцию скорости джета на картинную плоскость, то можно подумать, что полная скорость джета должна оказаться еще больше. Результат на первый взгляд кажется нелепым, однако ничего ненормального в нем нет, определенная таким образом скорость вполне может превышать скорость света.

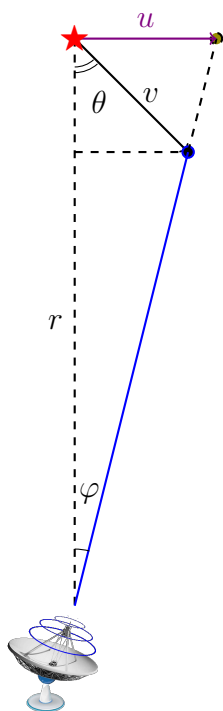
Построим модель наблюдаемого нами явления. Пусть активное ядро галактики находится на расстоянии r от наблюдателя, узел джета движется под углом θ к направлению к наблюдателю с пространственной скоростью v . В некоторый момент времени t наблюдатель наблюдает узел на угловом расстоянии $\varphi = \varphi(t)$ от ядра. Тогда угловая скорость, с которой узел перемещается по небесной сфере, может быть вычислена как $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, причем полученная нами скорость $u = r \cdot \omega$.

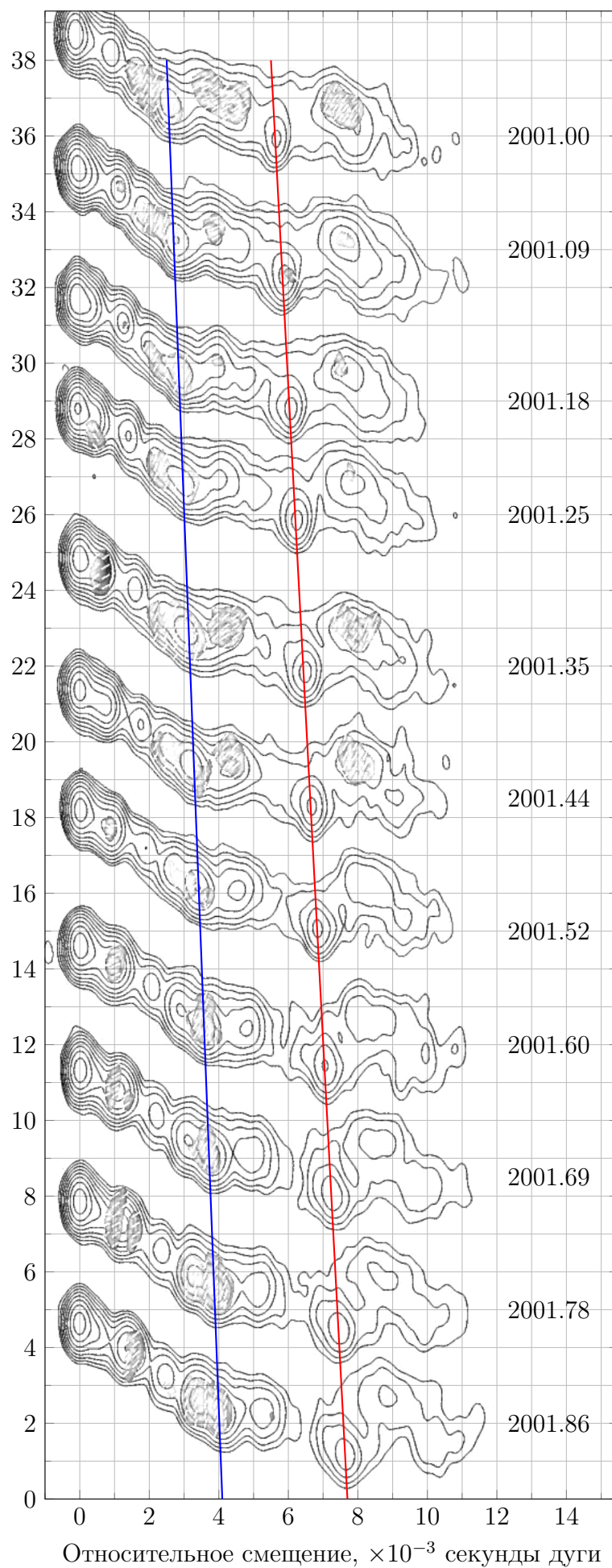
Пусть узел стартует из ядра в момент времени $\tilde{t} = 0$. К некоторому $\tilde{t}$ он пройдет расстояние $l = v\tilde{t}$. Однако информация об этом попадает к наблюдателю не бесконечно быстро, а со скоростью света, поэтому доберется до наблюдателя в момент времени t , равный (с учетом того, что $\varphi \ll 1$)

$$t \approx \tilde{t} + \frac{r - l \cdot \cos \theta}{c} = \tilde{t} + \frac{r - v\tilde{t} \cdot \cos \theta}{c}.$$

Угол φ при этом будет меняться со временем как

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{l \cdot \sin \theta}{r} = \frac{v\tilde{t} \cdot \sin \theta}{r}.$$





Вычислим

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \cdot \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \cdot \left(\frac{dt}{d\tilde{t}} \right)^{-1} = \frac{v \sin \theta}{r} \cdot \frac{1}{1 - v/c \cdot \cos \theta}.$$

Отсюда наблюдаемая скорость u равна

$$u = \frac{v \sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \theta}. \quad (5)$$

Отметим, что несмотря на формально возникающие «сверхсветовые» скорости, никакие формулы из специальной теории относительности тут не требуются. Они возникают при необходимости перехода из одной инерциальной системы отсчета в другую, движущуюся с достаточно большой скоростью по отношению к первой, а в данном случае ничего подобного не имеется: все рассмотрение происходит в одной системе отсчета. Единственным исключением из этого утверждения (впрочем, даже в этом случае не требующим учета эффектов СТО) может быть вопрос о возможной абберационной поправке к углу θ , однако несложно заметить, что она меньше точности, с которой этот угол задан в условии.

Поэтому вернемся к вычислениям. Поскольку мы знаем из условия, что $\theta = 15^\circ$, нам осталось выразить v . Будем измерять все скорости в скоростях света, тогда $c = 1$, $u \approx 5.3$. Выражая v из (5) и вычисляя требуемую в условии величину $1 - v$, получаем

$$1 - v = 1 - \frac{u}{\sin \theta + u \cos \theta} \approx 1.4 \cdot 10^{-2}.$$

Осталось добавить, что «прототипом» объекта и источником радиокарт послужила галактика Маркарян 1506, известная также как 3С 120, параметры которой были немного изменены.

Критерии оценивания.

К1. Измерение угловой скорости двух и более узлов	5
Для решения использован только один узел	-2
Нет конкретного результата (угловой скорости)	-1
К2. Вычисление расстояния до галактики	3
К3. Определение видимой скорости движения узлов	4
Она получена неявно и не оценена	-2
К4. Модель явления	7
К5. Получение выражения для пространственной скорости	3
К6. Вычисление итогового ответа	3
В качестве ответа дана скорость v вместо $c - v$	-2
Использованы другие единицы	-1
Избыточная точность ответа (3 и более значащих цифры)	-1
Максимальная оценка:	25