

Второй тур

11 класс

Задача 5. Инновации и антимонопольное регулирование (12 баллов)

На рынке миелофонов конкурируют две фирмы-производителя: «Крыс» и «Весельчак». Изначально обе фирмы производят устройства с постоянными предельными издержками $MC = 2$ коина за штуку.

Каждая из фирм может вложить $FC = 100$ коинов в научные исследования. В результате с вероятностью $1/2$ ей (независимо¹ от успеха конкурента) удастся разработать новую технологию, которая позволит снизить издержки на производство каждого миелофона до $MC = 1$ коин за штуку. Фирмы принимают решение об инвестициях одновременно. После того как решения приняты и новые технологии (в случае успеха) внедрены, фирмы производят и продают свою продукцию в течение двух лет.

Спрос на миелофоны абсолютно неэластичен и составляет $Q = 300$ устройств в год. Потребителям неважно, кто именно произвел миелофон, они купят его у того, кто продаст дешевле. Если издержки фирм одинаковы, конкуренция приводит к тому, что цена падает до уровня издержек и экономическая прибыль обеих фирм становится равна нулю. Если же издержки различны, то производитель с меньшими издержками может назначить цену, чуть меньшую предельных издержек конкурента, вытеснить его с рынка и получить положительную прибыль. Для упрощения расчетов считайте, что для вытеснения конкурента фирме с низкими издержками достаточно поставить цену, равную предельным издержкам другой фирмы.

Каждая фирма стремится максимизировать математическое ожидание своей суммарной прибыли (с учетом затрат на исследования) за два года.

а) (5 баллов) Будут ли фирмы инвестировать в исследования? Какова вероятность того, что в отрасли появится новая технология?

б) (7 баллов) Государство приняло антимонопольный закон, обязывающий фирму, разработавшую новую технологию, сделать ее доступной для всех конкурентов через год после внедрения у себя. Как это повлияет на вероятность появления новой технологии в отрасли по сравнению с пунктом а)? (В какую сторону и на сколько она изменится?)

Решение

а) Найдем ожидаемую прибыль фирмы от инвестиций. Чтобы получить положительную операционную прибыль, фирма должна стать *единственным* обладателем новой технологии. Вероятность этого события при условии, что инвестируют обе фирмы, равна произведению вероятности собственного успеха на вероятность неудачи конкурента: $1/2 \cdot (1 - 1/2) = 1/4$.

Если фирма становится единственным лидером, она устанавливает цену $P = 2$ (на уровне издержек отстающего конкурента) и продает $Q = 300$ единиц. Ее прибыль за один год составит: $(2 - 1) \cdot 300 = 300$ коинов. За два года суммарная операционная прибыль составит $300 \cdot 2 = 600$ коинов.

¹Вероятность того, что из двух *независимых* событий произойдут оба, равна произведению вероятностей этих событий.

Ожидаемая чистая прибыль (с учетом затрат на НИОКР) при обоюдных инвестициях: $E(\pi) = \frac{1}{4} \cdot 600 - 100 = 150 - 100 = 50$ коинов.

Так как ожидаемая прибыль положительна ($50 > 0$), фирме выгодно инвестировать, даже если конкурент тоже инвестирует. Если же конкурент откажется от инвестиций, вероятность стать единоличным лидером возрастает до $1/2$, и ожидаемая прибыль составит $\frac{1}{2} \cdot 600 - 100 = 200 > 0$. Таким образом, инвестиции — доминирующая стратегия. В равновесии обе фирмы будут инвестировать.

Вероятность того, что новая технология появится в отрасли (успеха добьется хотя бы одна фирма), равна: $P_{innov} = 1 - P(\text{обе потерпят неудачу}) = 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$.

б) Из-за нового закона фирма, победившая в технологической гонке, сможет пользоваться своим преимуществом только один первый год. На второй год технология станет общедоступной, издержки обеих фирм сравняются ($MC = 1$), цена упадет до 1, и прибыль обнулится.

Если обе фирмы инвестируют, ожидаемая чистая прибыль теперь составит: $E(\pi) = \frac{1}{4} \cdot (\text{прибыль за 1 год}) - 100 = \frac{1}{4} \cdot 300 - 100 = 75 - 100 = -25$ коинов. Поскольку ожидаемая прибыль отрицательна, ситуация, в которой инвестируют обе фирмы, больше не является равновесием.

Проверим, выгодно ли инвестировать только одной фирме (если вторая отказывается). Вероятность ее успеха составит $1/2$. Ожидаемая чистая прибыль: $E(\pi) = \frac{1}{2} \cdot 300 - 100 = 150 - 100 = 50$ коинов. Это больше нуля, значит, одной фирме инвестировать выгодно. В равновесии инвестировать будет только одна фирма.

Теперь вероятность появления новой технологии зависит только от одной фирмы и составляет $1/2 = 50\%$. **Вывод:** вероятность снизилась на 25%, с 75% до 50%.

Другой вариант состоит в том, что фирмы пользуются смешанными стратегиями — инвестируют с некоторыми вероятностями. Чтобы фирме было выгодно так действовать, она должна получать одинаковую чистую прибыль, делая инвестиции или воздерживаясь от них. Пусть фирма 2 инвестирует с вероятностью α . Тогда ожидаемая чистая прибыль фирмы 1, инвестирующей в НИОКР, составляет $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right) \cdot 300 - 100 = 50 - 75\alpha$ коинов. Фирме 1 безразлично, инвестировать или нет, если эта величина равна нулю, т.е. при $\alpha = \frac{2}{3}$. Таким образом, возможно равновесие Нэша в смешанных стратегиях в игре между фирмами: каждая фирма инвестирует в НИОКР с вероятностью $\frac{2}{3}$. При этом она разрабатывает новую технологию лишь с вероятностью $\frac{1}{3}$. В итоге новая технология появляется, если это получается хотя бы у одной фирмы, что происходит с вероятностью $1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$. Эта вероятность также меньше, чем $\frac{3}{4}$, т.е. вероятность снизилась по сравнению с п. а) (на $\frac{3}{4} - \frac{5}{9} = \frac{7}{36}$), как и в случае равновесия в чистых стратегиях, когда только одна фирма инвестирует.

Примечание: Этот пример является упрощенным вариантом модели эндогенного роста Ф. Агийона и П. Ховитта. Он показывает, что излишне жесткая антимонопольная политика может снизить стимулы к инновациям и затормозить технологический прогресс.

Схема проверки

а) Всего за пункт (а) 5 баллов, из них:

- К1 Верно рассчитана ожидаемая прибыль при инвестировании обеих фирм (50 коинов) → 2 балла
- К2 Рассчитана ожидаемая прибыль 200 коинов (или показано, что она положительна) в случае, если фирма-конкурент не инвестирует → 1 балл
- К3 Сделан обоснованный вывод о том, что в равновесии инвестируют обе фирмы → 1 балл
- К4 Верно рассчитана вероятность появления технологии (75%), если равновесие “обе фирмы инвестируют” было получено корректно → 1 балл
- К5 Некорректно учтены издержки (без изменения выводов) → не более 2 баллов из 5
- К6 Сравнение выигрышей только при одинаковых действиях фирм (как будто они кооперируются) → не более 2 баллов из 5
- К7 Арифметическая ошибка в п. а), не влияющая на выводы → -1 балл
- К8 Показано, что при обоюдных инвестициях ожидаемая прибыль становится отрицательной (-25 коинов) → 2 балла
- К9 Показано, что если инвестирует одна фирма, её ожидаемая прибыль положительна (50 коинов) → 2 балла
- К10 Сделан верный вывод, что в новом равновесии инвестирует только одна фирма (или что каждая фирма инвестирует с вероятностью $\frac{2}{3}$, если найдено смешанное равновесие) → 2 балла
- К11 Верно рассчитаны новая вероятность появления технологии (50%) (или $\frac{5}{9}$ в случае смешанного равновесия) и её снижение по сравнению с п. а) (на $1/4$ или $7/36$) → 1 балл
- К12 Для получения полного балла за п. б) достаточно правильно ответить на поставленные вопросы для хотя бы одного из равновесий, чистого или смешанного.
- К13 Сравнение выигрышей только при одинаковых действиях фирм (как будто они кооперируются) → не более 2 баллов из 7
- К14 Арифметическая ошибка в п. б), не влияющая на выводы → -1 балл
- К15 Для обоих пунктов: неправильно понято условие задачи (решается другая задача) → 0 баллов за задачу

Задача 6. Торговля с ограничениями (12 баллов)

В мире существуют две страны — Альфа и Бета. Они производят и потребляют два товара: X и Y . Технологии стран различаются, кривые производственных возможностей задаются следующими уравнениями: для страны Альфа $X_A^2 + 2000Y_A = 1\,200\,000$, для страны Бета $X_B^2 + 400Y_B = 480\,000$.

Предпочтения потребителей в обеих странах одинаковые. Они потребляют товары строго комплектами в пропорции 1:1, то есть функция полезности имеет вид $U = \min(X, Y)$.

Считайте, что во всех обменах цена товара Y равна 1, а цена товара X обозначается как p . При решении этой задачи численные значения цен и объемов можно округлять до первого знака после запятой.

а) (4 балла) Представим, что страны открывают границы и торгуют без ограничений, при этом цена устанавливается на уровне равновесия совершенной конкуренции. Найдите мировую цену p^* , объемы производства, потребления и экспорта (импорта) товара X для каждой страны.

б) (4 балла) Правительство страны, ставшей импортером товара X , решает начать «торговую войну» с целью увеличить собственное производство этого товара. Для этого оно вводит потолок цены $\bar{p}$ на импорт на уровне $0,9p^*$. Выиграют ли потребители в этой стране по сравнению со свободной торговлей?

в) (4 балла) Правительство решает опустить потолок цены еще ниже, до уровня $\hat{p} = 2p^*/3$. Выиграют ли потребители страны-импортера товара X по сравнению со свободной торговлей и с потолком $\bar{p}$ теперь?

Решение

а) **Равновесие свободной торговли.**

1 способ: Перепишем КПВ обеих стран через Y . Страна Альфа:

$$Y_A = 600 - \frac{X_A^2}{2000}$$

Страна Бета:

$$Y_B = 1200 - \frac{X_B^2}{400}$$

В равновесии сложится ситуация, в которой альтернативные издержки (производные по X по модулю) в обеих странах, сравниваются при выбранных ими объемах производства с отношением цен, равным p :

$$\frac{X_A}{1000} = \frac{X_B}{200} = p$$

Отсюда $X_A = 1000p$ и $X_B = 200p$, или $X_A = 5X_B$.

Из баланса суммарного производства и потребления обоих товаров получаем

$$X_A + X_B = 6X_B = Y_A + Y_B = 600 - \frac{X_A^2}{2000} + 1200 - \frac{X_B^2}{400} =$$

$$= 600 - \frac{25X_B^2}{2000} + 1200 - \frac{X_B^2}{400} = 1800 - \frac{3X_B^2}{200}$$

Из уравнения $1800 - \frac{3X_B^2}{200} - 6X_B = 0$ (или, преобразовав, $X_B^2 + 400X_B - 120000 = 0$) получаем объем производства товара X .

$$X_B = 200$$

Тогда $X_A = 1000$ (соответствующие объемы производства второго товара в странах: $Y_A = 100$ и $Y_B = 1100$).

Цена равна

$$p^* = \frac{X_A}{1000} = \frac{1000}{1000} = 1$$

Очевидно, что с учетом функции полезности и объемов производства товаров, экспортером товара X будет страна Альфа, а импортером - страна Бета.

Потребление товара X в странах и величину экспорта найдем, например, из равенства экспорта и импорта (с учетом их стоимости и равенства потребления X и Y) для страны Бета:

$$ImX_B = p(X_B^c - 200) = X_B^c - 200 = ExY_B = 1100 - Y_B^c = 1100 - X_B^c$$

Отсюда

$$X_B^c = Y_B^c = 650,$$

$$ImX_B = ExX_A = 450,$$

$$X_A^c = 1000 - ExX_A = 550 = Y_A^c$$

2 способ: Определив $X_A = 1000p$ и $X_B = 200p$, запишем КПВ через p

$$Y_A = 600 - 500p^2, Y_B = 1200 - 100p^2$$

Тогда бюджетное ограничение стран $I = pX + Y$ запишется

$$I_A = 600 + 500p^2, I_B = 1200 + 100p^2$$

Наконец, спрос на X в странах (с учетом равенства потребления X и Y)

$$X_A^c = \frac{600 + 500p^2}{p + 1}$$

$$X_B^c = \frac{1200 + 100p^2}{p + 1}$$

Получаем зависимость экспорта и импорта от цены товара X - экспорт из Альфы - «готовность страны Альфа поставить товар» (аналог предложения):

$$ExX_A(p) = 1000p - \frac{600 + 500p^2}{p + 1} = \frac{500p^2 + 1000p - 600}{p + 1}$$

- импорт в Бету – «готовность страны Бета купить товар» (аналог спроса):

$$ImX_B(p) = \frac{1200 + 100p^2}{p + 1} - 200p = \frac{1200 - 200p - 100p^2}{p + 1}$$

В равновесии получаем:

$$ExX_A(p) = ImX_B(p) \Rightarrow 600p^2 + 1200p - 1800 = 0 \Rightarrow p^2 + 2p - 3 = 0$$

Корень: $p^* = 1$. Отсюда находим все требуемое: объемы производства, потребления и экспорта товара X .

б) Мягкий потолок $\bar{p} = 0,9$. Готовность Альфы поставлять товар по этой цене:

$$ExX_A(0,9) = \frac{500 \cdot 0,81 + 1000 \cdot 0,9 - 600}{1,9} = \frac{705}{1,9} \approx 371,05$$

Желание страны Бета получить товар по этой цене:

$$ImX_B(0,9) = \frac{1200 - 200 \cdot 0,9 - 100 \cdot 0,81}{1,9} = \frac{939}{1,9} \approx 494,2$$

Возникает ситуация дефицита товара X : в страну Бета будут поставлять лишь 371 единиц товара X . Далее находим внутреннее производство в стране Бета из баланса потребления товаров X и Y :

$$X_B + 371 = Y_B - 0,9 \cdot 371 = 1200 - \frac{X_B^2}{400} - 333,9$$

Отсюда $X_B \approx 287,8$. Потребление X составит $287,8 + 371 = 658,8$ – этот объем больше потребления в пункте (а), поэтому потребители в Бете выиграли.

Можно было сразу найти объем потребления из следующего выражения:

$$X_B^c = Y_B^c = 1200 - \frac{(X_B^c - 371)^2}{400} - 333,9$$

Отсюда $X_B^c = 658,8$.

в) Жесткий потолок $\hat{p} = 2/3$. Готовность Альфы поставлять товар по этой цене:

$$ExX_A(2/3) = \frac{500 \cdot 4/9 + 1000 \cdot 2/3 - 600}{5/3} = \frac{520}{3} \approx 173,3$$

Желание страны Бета получить товар по этой цене:

$$ImX_B(2/3) = \frac{1200 - 200 \cdot 2/3 - 100 \cdot 4/9}{5/3} = \frac{1840}{3} \approx 613,3$$

Снова имеем дело с дефицитом товара X : в страну Бета будут поставлять лишь 173,3 единиц товара X . Далее находим внутреннее производство в стране Бета из баланса потребления товаров X и Y :

$$X_B + 173,3 = Y_B - \frac{2}{3} \cdot 173,3 = 1200 - \frac{X_B^2}{400} - 115,6$$

Отсюда $X_B \approx 436$. Потребление X составит $436 + 173,3 = 609,3$ – этот объем меньше потребления и в пункте (а), и в пункте (б), поэтому потребители в Бете проиграли.

Схема проверки

а) Всего за пункт 4 балла, из них:

- К1 Записаны условия равновесия $\frac{X_A}{1000} = \frac{X_B}{200} = p$ или $X_A = 1000p$ и $X_B = 200p \rightarrow 1$ балл
- К2 Найдена (любым корректным способом) равновесная мировая цена $p^* = 1 \rightarrow 2$ балла
- К3 Рассчитаны равновесные объемы производства и потребления (одно из четырех чисел может быть пропущено при условии, что из решения видно, как найти пропущенное), а также величина экспорта X в страну Бета $\rightarrow 1$ балл

б) Всего за пункт 4 балла, из них:

- К4 Рассчитан объем экспорта Альфы при цене 0,9 ($ExX_A \approx 371,05$) $\rightarrow 1$ балл
- К5 Найдено оптимальное внутреннее производство Беты ($X_B \approx 287,8$) $\rightarrow 2$ балла
- К6 Определение величины потребления X в стране Бета ($X_B^c \approx 658,8$) и сделан верный вывод о выигрыше $\rightarrow 1$ балл
- К7 Если участник вычислял потребление минуя производство, он получает и К5, и К6
- К8 Если при вычислении внутреннего производства в стране участник исходил из равенства $\frac{X_B}{200} = p$, то он не получает баллов по К5 и К6
- К9 Если, вычислив верное потребление, вывод был неверным (потребители проиграли), то К6 не засчитывается

в) Всего за пункт 4 балла, из них:

- К10 Рассчитан объем экспорта Альфы при цене $2/3$ ($ExX_A \approx 173,3$) $\rightarrow 1$ балл
- К11 Найдено оптимальное внутреннее производство Беты ($X_B \approx 436$) $\rightarrow 2$ балла
- К12 Определение величины потребления X в стране Бета ($X_B^c \approx 609,3$) и сделан верный вывод о проигрыше $\rightarrow 1$ балл
- К13 Если участник вычислял потребление минуя производство, он получает и К11, и К12
- К14 Если при вычислении внутреннего производства в стране участник исходил из равенства $\frac{X_B}{200} = p$, то он не получает баллов по К11 и К12
- К15 Если после вычисления верного потребления вывод был неверным (потребители выиграли), то К12 не засчитывается

Задача 7. Выбираем самое милое животное (12 баллов)

Одна радиостанция в 2010 году провела эксперимент среди своих радиослушателей. Всем участникам предлагалось посмотреть три милых видео: с котенком, с толстым лори и с медвежонок. После этого участников разделили на две группы случайным образом. Участников из первой группы попросили выбрать самое милое животное с их точки зрения, а из второй — угадать, какое животное окажется наиболее популярным у участников первой группы. Если член второй группы угадывает правильно, он получает приз. Результаты приведены в таблице:

	Первая группа	Вторая группа
Котенок	50 %	75 %
Толстый лори	27 %	15 %
Медвежонок	23 %	10 %

У каждого радиослушателя есть строгие предпочтения на множестве животных, то есть каждый может проранжировать самого милого, второго и третьего по милоте. Каждый радиослушатель знает свои предпочтения, но не знает наверняка, как распределены предпочтения остальных.

а) (2 балла) Какой механизм приводит к тому, что результаты в двух группах могли оказаться такими разными?

б) (2 балла) Предположим, что после публичного объявления результатов организаторы решили провести аналогичное голосование среди тех же самых групп радиослушателей еще раз. Какие результаты голосования в второй группе можно ожидать во втором эксперименте? Объясните, какой механизм стоит за вашей гипотезой.

в) (2 балла) Предположим, что в этом эксперименте была бы третья группа, которая пыталась бы угадать победителя голосования во второй группе, а угадавшие правильно получали бы приз. Какие результаты голосования вы бы ожидали в первом и втором раундах в третьей группе?

г) (6 баллов) Приведите пример, где в экономике работают механизмы принятия решений, аналогичные механизмам из этой задачи. Четко выделите, какие группы экономических агентов являются в вашем примере аналогами первой и второй группы участников эксперимента на радиостанции. Укажите, как устроены множество альтернатив и предпочтения агентов в вашем примере. Опишите механику, действующую в вашем примере и аналогичную выборам милого животного на радиостанции. Наконец, приведите последствия принятых решений для экономических агентов из каждой группы в вашем примере. Запишите ответ в следующем виде:

- Экономическое взаимодействие:
- Аналог первой группы:
- Аналог второй группы:
- Альтернативы:
- Как устроено принятие решений:
- Ключевые последствия принятых решений:

Решение

Описанный в задаче эксперимент (который в 2010 году был проведен программой Planet Money Национального общественного радио) иллюстрирует идею «Кейнсианского конкурса красоты» (Keynesian beauty contest) – это одна из самых известных стратегических концепций в экономической науке. В «Общей теории занятости...» Кейнс сравнил инвесторов с участниками газетного конкурса красоты: «таким образом, каждый участник должен выбрать не те лица, которые он сам считает самыми красивыми, а те, которые, по его мнению, с наибольшей вероятностью понравятся другим участникам, которые все смотрят на проблему с одной и той же точки зрения... Мы достигли третьей степени, где мы направляем свой интеллект на предвидение того, чего ожидает среднестатистическое мнение. И есть, я полагаю, те, кто практикует четвертую, пятую и более высокие степени.» После появления в 1980х годах формальных моделей «Кейнсианского конкурса красоты» он многократно реализовывался в виде исследовательских или социальных экспериментов.

а) (2 балла) В первой группе участники действуют искренне: каждый выбирает альтернативу, которая максимизирует его личную полезность (самое милое животное по строгим предпочтениям). Поэтому итоговое распределение голосов в первой группе приближенно отражает доли людей, для которых соответствующее животное — лучший вариант.

Во второй группе цель иная: участник получает приз, если его выбор совпадает с самым популярным выбором в первой группе. Следовательно, рациональный участник второй группы выбирает не «самое милое лично для него», а вариант, который, по его мнению, с наибольшей вероятностью станет победителем в первой группе. Конечно, он мог бы спрогнозировать «наивно» – на основе своих личных предпочтений (или подбрасыванием кубика), но если ему доступна какая-то информация о предпочтениях окружающих, он их учтет в своем прогнозе (для этого есть стимулы). Источником дополнительной информацией может быть какой-то сетевой эффект, опрос случайных знакомых, опора на стереотипы. При этом во второй группе возникает координация на популярной альтернативе: часть из тех, кто понимает, что предпочитает непопулярную альтернативу, может рационально выбрать популярную. Такая логика «ожиданий ожиданий» усиливает концентрацию голосов на одном варианте. Из-за этого механизма доля котенка во второй группе существенно выше, чем доля котенка как искреннего выбора в первой группе (75% против 50%).

б) (2 балла) После объявления итогов первого раунда участники из второй группы получают дополнительную информацию: в первой группе победил котенок. Все обновляют свои ожидания о предпочтениях членов первой группы. Теперь рациональный выбор во второй группе — голосовать за котенка, поскольку это позволяет получить приз. В предположениях о рациональности во втором запуске можно ожидать, что доля голосов котенка во второй группе близка к 100%.

в) (2 балла) **Первый раунд:** Третья группа решает задачу «угадай победителя во второй группе». Во второй группе, в свою очередь, каждый участник пытается угадать победителя в первой группе. В третьей группе возникает еще один уровень ожиданий: «я выбираю то, что выбирают те, кто угадывает выбор других». Другими словами, участники третьей группы учитывают не только то, что у них есть свои пред-

почтения и ожидания о победителе в первой группе, но и то, что участники второй группы, поведение которых они угадывают, уже проделали этот учет ожиданий в своих голосах. Таким образом, можно считать, что в третьей группе доля голосов за победителя может быть не меньше, а скорее даже больше, чем во второй.

Второй раунд: После первого запуска становятся известны результаты. Третья группа перед вторым раундом получает «сигнал», что в первой группе побеждает котенок, а вторая группа (получив тот же сигнал) почти в полном составе проголосует за котенка. Следовательно, третья группа ожидает, что рациональные представители второй группы выберут котенка. Значит, почти 100% членов третьей группы проголосуют за котенка во втором раунде.

г) (6 баллов) Возможный пример должен использовать ключевые свойства механизма принятия решений, который можно сформулировать на основе предшествующих пунктов: а) у участников рынка существуют предпочтения (основанные на вкусах или каких-то прогнозных оценках) на множестве экзогенно заданных альтернатив, б) существуют игроки, которые могут стратегически учитывать в своих решениях агрегированные предпочтения остальных участников (что нравится большинству).

Например:

- **Экономическое взаимодействие:** Торговля на фондовом рынке акций или иных активов.
- **Аналог первой группы:** Фундаментальные инвесторы. Они покупают актив, который кажется им лучшим по фундаментальным причинам (ожидаемые дивиденды, прибыль, низкий риск и т.п.).
- **Аналог второй группы:** Спекулянты / краткосрочные трейдеры. Они покупают актив, который, по их мнению, будет позднее покупать большинство фундаментальных инвесторов (или большинство других участников рынка), чтобы заработать на росте цены. (! Им может быть выгодно это сделать, даже если они сами не считают этот актив перспективным, достаточно, чтобы они верили в оптимизм других, пусть даже и ошибочный – тот самый animal spirit).
- **Альтернативы:** Купить актив А, купить актив В.
- **Как устроено принятие решений:** Решения представителей первой группы основаны на фундаментальной оценке. Кто-то предпочитает актив А, кто-то — актив В. Предпочтения второй группы не зависят от фундаментальной оценки, а зависят от вероятности того, что актив станет массово покупаемым и вырастет в цене.
- **Ключевые последствия принятых решений:** Отклонение цен от фундаментальной стоимости, самоусиливающиеся тренды (пузыри). Если актив считается «тем, который купят другие», его действительно массово покупают спекулянты, что толкает цену вверх и подтверждает первоначальные ожидания.

Схема проверки

а) Всего за пункт (а) 2 балла, из них:

- К1: Верно указан любой механизм, который помог бы участникам второй группы верно спрогнозировать победителя – убеждения, основанные на стереотипах,

опрос случайных знакомых и т.д. → 2 балла

б) Всего за пункт (б) 2 балла, из них:

- К2: Верно указано, как обновление информации позволило участникам второй группы сделать более точный прогноз. → 2 балла

в) Всего за пункт (в) 2 балла, из них:

- К3: Верно сформулировано, почему можно ожидать, что среди участников третьей группы доля голосов за котенка в первом раунде должна быть не меньше, чем у второй группы, а, возможно, и больше. → 1 балл (Просто «большинство голосов за котенка» – не оценивается баллом).
- К4: Верно сформулировано, почему среди участников третьей группы доля голосов за котенка во втором раунде должна еще вырасти по сравнению с первым раундом. → 1 балл

г) Всего за пункт (г) 6 баллов.

К5: Предложенный пример должен отвечать основным свойствам модели, указанным в решении, в том смысле, что не каждая ситуация недостатка информации является иллюстрацией «конкурса красоты». Если в указанном примере не было нестратегических игроков (аналога группы 1), группа 2 могла формировать набор альтернатив для группы 1, у групп были разные наборы альтернатив, ситуация не предполагала распределения предпочтений на альтернативах – пример не засчитывался как верный. (По этим основаниям не засчитываются, в частности, примеры с олигополией, маркетинговые исследования предпочтений потребителей, формирование политики ЦБ).

К6: Также не оцениваются примеры гипотетических ситуаций, повторяющих конкурс из условия (*ресторан проводит акцию среди посетителей на любимое блюдо, на концерте устроен конкурс на определение лучшей песни* и т.д.)

Полный балл за этот пункт выставлялся, если явным образом были выполнены следующие пункты по требуемой структуре ответа:

- К7: Верно описано подходящее экономическое взаимодействие → 1 балл
- К8: Корректно описан аналог первой группы → 1 балл
- К9: Корректно описан аналог второй группы → 1 балл
- К10: Корректно названы альтернативы → 1 балл
- К11: Верно описано устройство принятия решений двумя группами, предполагая, что одна действует более «стратегично», чем другая → 1 балл
- К12: Верно описаны возможные такого принятия решений в рамках заданного экономического взаимодействия → 1 балл

Задача 8. Когда брать ипотеку? (12 баллов)

Иван Дальновидный имеет следующую личную финансовую цель. Через 40 лет (480 месяцев) от текущего момента, когда он выйдет на пенсию:

- у него должна быть своя квартира;
- ипотечный кредит за нее должен быть полностью погашен;
- величина чистых активов (стоимость квартиры плюс накопления на депозите) должна быть максимально возможной при этих условиях.

Иван живет в стране с очень стабильной экономикой: инфляция в ней всегда равна $100r\%$ в месяц (на эту величину ежемесячно растут все цены в экономике, в том числе цены квартир в продаже и стоимость аренды жилья), доходность всех депозитов также составляет $100r\%$ в месяц (начисляется на остаток ежемесячно), на столько же процентов будет расти и ежемесячный доход Ивана за вычетом необходимых расходов на все товары и услуги, кроме жилья. В начальный момент времени состояние Ивана описывается следующими значениями переменных:

- он живет в съемной квартире, арендная плата за которую равна $R_0 > 0$ (арендная плата выплачивается в конце каждого месяца);
- доход за месяц за вычетом необходимых расходов, кроме жилья, равен $Y_0 > R_0$;
- накопления на депозите отсутствуют: $S_0 = 0$;
- цена такой квартиры, какую хочет купить Иван, равна $P_0 > 0$.

Своей квартиры у Ивана нет, и без ипотеки (на собственные сбережения) он купить ее не сможет ни в один из моментов. Он может в любой момент прекратить арендовать квартиру и купить свою в ипотеку по ставке $100r_c\%$ в месяц ($r_c > r$, капитализация ежемесячно). Назовем этот момент t^* . Срок ипотеки составляет $N < 480$ месяцев. Чтобы взять ипотеку, он снимает все свои сбережения с депозита и использует их для уплаты первоначального взноса, а на оставшуюся часть стоимости квартиры берет кредит. Начиная с момента $t^* + 1$, он перестает платить за аренду и вместо нее выплачивает в моменты $t^* + 1, t^* + 2, \dots, t^* + N$ не растущий с инфляцией ипотечный платеж M , рассчитываемый по правилу аннуитета.

Независимо от того, платит Иван в конкретный месяц за аренду или за ипотеку, все оставшиеся средства он сразу после этой выплаты кладет на банковский депозит (кроме момента t^* , в который оставшиеся после уплаты аренды средства идут в счет первоначального взноса по ипотеке).

а) (3 балла) Найдите сумму сбережений Ивана S^* в момент времени t^* (непосредственно перед покупкой квартиры) и размер кредита L^* .

б) (1 балл) Выразите M через L^*, r_c и N .

в) (8 баллов) В какой момент t^* Ивану нужно взять ипотеку, чтобы достичь личной финансовой цели? Ответ обоснуйте и выразите через соотношение параметров Y_0, R_0, r_c, r и N . Подсказка: вам может помочь дисконтирование.

Решение

а) (3 балла) В каждый момент t ($0 \leq t \leq t^*$) Иван откладывает на депозит сумму $Y_t - R_t = (Y_0 - R_0)(1 + r)^t$. Эти средства лежат на депозите оставшиеся $(t^* - t)$ месяцев

вплоть до момента t^* . К моменту t^* этот взнос с учетом процентов превратится в:

$$((Y_0 - R_0)(1 + r)^t) \cdot (1 + r)^{t^* - t} = (Y_0 - R_0)(1 + r)^{t^*}$$

Будущая стоимость каждого взноса к моменту t^* одинакова и равна $(Y_0 - R_0)(1 + r)^{t^*}$. Поскольку таких взносов ровно $t^* + 1$ (если считать с момента 0), общая сумма сбережений составит:

$$S_{t^*} = (t^* + 1)(Y_0 - R_0)(1 + r)^{t^*}$$

Размер кредита равен стоимости квартиры в момент t^* минус сбережения:

$$L_{t^*} = P_{t^*} - S_{t^*} = P_0(1 + r)^{t^*} - (t^* + 1)(Y_0 - R_0)(1 + r)^{t^*} = (P_0 - (t^* + 1)(Y_0 - R_0))(1 + r)^{t^*}$$

б) (1 балл) Ежемесячный аннуитетный платеж M выплачивается N раз. Приведенная стоимость аннуитета (при ставке r_c) равна сумме кредита:

$$L_{t^*} = \sum_{k=1}^N \frac{M}{(1 + r_c)^k} = M \frac{1 - (1 + r_c)^{-N}}{r_c}$$

Отсюда сам платеж равен:

$$M = L_{t^*} \frac{r_c}{1 - (1 + r_c)^{-N}}$$

в) (8 баллов) Конечная стоимость квартиры $P_{480} = P_0(1 + r)^{480}$ от выбора t^* не зависит. Поэтому нужно максимизировать сумму на депозите Ивана на момент $t = 480$.

Максимизация суммы на депозите в момент $t = 480$ эквивалентна максимизации приведенной к моменту 0 стоимости всех его доходов и расходов к моменту $t = 480$. Дисконтировать потоки нужно по ставке r , так как именно она является ставкой по депозиту.

Поток доходов Ивана Y_t от выбора t^* не зависит. Поэтому максимизация богатства эквивалентна минимизации приведенной стоимости издержек на решение жилищного вопроса (аренды и ипотеки), которые состоят из трех частей: арендные платежи, первый взнос, и платежи по ипотеке.

1. Приведенная стоимость арендных платежей за t^* месяцев составит:

$$PV_R(t^*) = \sum_{t=0}^{t^*} \frac{R_0(1 + r)^t}{(1 + r)^t} = \sum_{t=0}^{t^*} R_0 = R_0 \cdot (t^* + 1).$$

2. Приведенная к моменту 0 стоимость потраченных на первый взнос сбережений в момент t^* равна

$$PV_S(t^*) = S_{t^*}(1 + r)^{-t^*} = (t^* + 1)(Y_0 - R_0)(1 + r)^{t^*}(1 + r)^{-t^*} = (t^* + 1)(Y_0 - R_0).$$

3. Приведенная стоимость аннуитетных платежей по кредиту составит:

$$PV_M(t^*) = \sum_{k=1}^N \frac{M}{(1+r)^{k+t^*}} = \frac{1 - (1+r)^{-N}}{r} \frac{M}{(1+r)^{t^*}}.$$

Подставив M , а затем L_{t^*} , получаем:

$$\begin{aligned} PV_M(t^*) &= \frac{1 - (1+r)^{-N}}{r} \frac{L_{t^*}}{(1+r)^{t^*}} \frac{r_c}{1 - (1+r_c)^{-N}} \\ &= \frac{1 - (1+r)^{-N}}{r} (P_0 - (t^* + 1)(Y_0 - R_0)) \frac{r_c}{1 - (1+r_c)^{-N}}. \end{aligned}$$

Введем обозначение $K := \frac{r_c(1-(1+r)^{-N})}{r(1-(1+r_c)^{-N})}$. Тогда общая функция приведенных издержек от t^* имеет вид:

$$\begin{aligned} C(t^*) &= PV_R(t^*) + PV_S(t^*) + PV_M(t^*) \\ &= R_0 t^* + (t^* + 1)(Y_0 - R_0) + K(P_0 - (t^* + 1)(Y_0 - R_0)) \\ &= \text{const} + t^*[Y_0 - K(Y_0 - R_0)]. \end{aligned}$$

Функция $C(t^*)$ линейна. Оптимум зависит от знака коэффициента при t^* :

- Если $Y_0 > K(Y_0 - R_0)$, коэффициент положителен. Издержки растут с увеличением t^* . Чтобы их минимизировать, Ивану нужно выбрать минимально возможный срок, то есть $t^* = 0$ (взять ипотеку сразу).
- Если $Y_0 < K(Y_0 - R_0)$, коэффициент отрицателен. Издержки убывают с ростом t^* . Оптимально откладывать покупку как можно дольше, то есть $t^* = 480 - N$.
- Если $R_0 = K(Y_0 - R_0)$, издержки не зависят от t^* . Ивану безразлично, когда брать ипотеку, любой момент $t^* \in [0; 480 - N]$ будет оптимальным.

Примечание 1: Если бы по условиям ипотеки требовался минимальный первоначальный взнос, то условие на параметры, определяющие то, когда нужно брать ипотеку (в начале или в конце), не поменялось бы, то вместо $t^* = 0$ нужно было бы брать ипотеку сразу, как только сумма сбережений достигает минимального первоначального взноса.

Примечание 2: Вывод достаточно интуитивен: получаем, что ипотеку нужно откладывать на будущее, если доля арендой платы в доходе R_0/Y_0 достаточно низка или если ставка r_c достаточно высока.

Примечание 3: в интернете можно найти много разных советов о том, когда стоит брать ипотеку. Некоторые советчики предлагают брать ее, например, в момент, когда арендная плата сравнивается с аннуитетным платежом. Данная задача показывает, что это необязательно оптимально.

Схема проверки

Участник мог исходить как из того, что число периодов роста совпадает с числом моментов зачисления средств, так из того, что они отличаются на единицу. Засчитывались решения при обеих трактовках при условии, что участник придерживался единой трактовки на протяжении всей работы.

а) Всего за пункт 3 балла, из них:

K1 Верно определена сумма ежемесячного отчисления на депозит $\rightarrow 1$ балл

K2 Получено верное выражение для накоплений $S_{t^*} = (t^* + 1)(Y_0 - R_0)(1 + r)^{t^*} \rightarrow 1$ балл

K3 Верно выражен размер кредита L_{t^*} через стоимость квартиры и накопления $\rightarrow 1$ балл

б) Всего за пункт 1 балл:

K4 Записана верная формула аннуитетного платежа M через L^* , r_c и $N \rightarrow 1$ балл

в) Всего за пункт 8 баллов, из них:

K5 Указано, что стоимость квартиры на конец горизонта планирования $P_0(1 + r)^{480}$ не влияет на выбор оптимального t^* , или стоимость квартиры учтена в целевой функции $\rightarrow 1$ балл

K6 Описана оптимизационная задача $\rightarrow 1$ балл

K7 Выписана верная формула для целевой функции, приведенной к любому фиксированному моменту времени $\rightarrow 1$ балл

K8 Формула для целевой функции правильно преобразована к виду $const - t^*(Y_0 - K(Y_0 - R_0))$.

K9 Приведено рассуждение о том, что целевая функция линейна $\Rightarrow$ оптимум достигается на одном из краев (за исключением пограничного случая) $\rightarrow 1$ балл

K10 Рассмотрен случай $Y_0 > K(Y_0 - R_0)$, сделан вывод о том, что в нем $t^* = 0 \rightarrow 1$ балл

K11 Рассмотрен случай $Y_0 = K(Y_0 - R_0)$, сделан вывод о том, что в нем t^* любое от 0 до $480 - N \rightarrow 1$ балл

K12 Рассмотрен случай $Y_0 < K(Y_0 - R_0)$, сделан вывод о том, что в нем $t^* = 480 - N \rightarrow 1$ балл